

**Программа экзамена по математическому анализу для
студентов 1 курса ФИЗМЕХа (гр. 5030102/40001, 5030102/40002,
5030102/40003, 5030102/40004, 5030103/40001, 5030103/40002,
5030103/40003, 5030103/40004.**

2 семестр 2024/25 уч.г.

Лектор – доц. Моисеев А.А.

1. Понятие определенного интеграла (разбиение, ранг разбиения, интегральная сумма, основное определение).
2. Суммы Дарбу, их свойства.
3. *Лемма Дарбу. Условия интегрируемости в терминах сумм Дарбу.
4. Интегрируемость непрерывной и монотонной функций.
5. Линейность и аддитивность определенного интеграла.
6. Монотонность определенного интеграла. Неравенства. Теорема о среднем.
7. Интеграл с переменным верхним пределом. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости.
8. Существование первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование четных и нечетных функций, периодических функций.
10. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Вычисление интегралов $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$. Формула Валлиса.
11. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
12. Площадь плоской фигуры. Определение. Основные свойства площади. Вычисление площади криволинейной трапеции.
13. Аддитивная функция промежутка. Предложение о представлении аддитивной функции интегралом. Вычисление площади криволинейного сектора.
14. Понятие объема. Вычисление объема тела с заданными площадями поперечных сечений.
15. Вычисление объема тела вращения криволинейной трапеции вокруг координатных осей. Формула для объема тела вращения криволинейного сектора (без доказательства).
16. Понятие длины пути. Вычисление длины гладкого пути.
17. Понятие несобственного интеграла. Несобственные интегралы I и II рода. Согласованность понятий собственного и несобственного интегралов.
18. Особая точка несобственного интеграла. Интегрируемость ограниченной функции. Несобственный интеграл с несколькими особыми точками. Главное значение.
19. Критерий Коши сходимости несобственного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница для несобственного интеграла.
20. Линейность и монотонность несобственного интеграла. Свойства остатка несобственного интеграла.
21. Замена переменной и интегрирование по частям в несобственном интеграле.
22. Необходимое и достаточное условие сходимости несобственного интеграла от положительной функции. Теорема сравнения в общей форме.
23. Теорема сравнения в предельной форме. Несобственные интегралы для степенной функции. Специальная теорема сравнения.
24. Несобственные интегралы от знакопеременных функций. Абсолютная и условная сходимость.
25. *Признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.
26. Пространство $\mathbb{R}^n$. Линейная структура, скалярное произведение. Норма, расстояние.
27. Последовательности в $\mathbb{R}^n$. Определение предела последовательности. Простейшие свойства. Теорема о смысле сходимости в $\mathbb{R}^n$. Критерий Коши.

28. Внутренние, внешние и граничные точки множества в $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества. Примеры. Условие замкнутости в терминах последовательностей.
29. Понятие компакта. Ограниченность и замкнутость компакта в $\mathbb{R}^n$.
30. *Лемма Гейне-Бореля.
31. Функция нескольких переменных Предел. Основные свойства предела.
32. Непрерывные функции нескольких переменных. Непрерывные отображения со значениями в $\mathbb{R}^n$. Локальные свойства. Непрерывность композиции.
33. *Общее условие непрерывности.
34. Теорема о непрерывном образе компакта. Теоремы Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте.
35. *Равномерная непрерывность функции нескольких переменных. Теорема Кантора о функции, непрерывной на компакте.
36. *Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции.
37. Понятие частной производной функции нескольких переменных. Дифференцируемая функция. Непрерывность дифференцируемой функции. Существование частных производных.
38. Достаточное условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
39. *Линейное отображение $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Норма линейного отображения.
40. *Теорема о дифференцируемости композиции.
41. Формулы для частных производных сложной функции. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.
42. Формула конечных приращений Лагранжа для функции нескольких переменных.
43. Касательная плоскость графика функции двух переменных и поверхности, заданной неявным уравнением.
44. Производная по направлению и градиент.
45. Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных частных производных.
46. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
47. Простейшая теорема о неявной функции.
48. *Теорема об обратной функции. Формулировка. Доказательство инъективности.
49. *Теорема об обратной функции. Формулировка. Доказательство открытости образа.
50. *Общая теорема о неявной функции, определяемой системой уравнений.
51. Зависимость системы функций. Необходимое условие зависимости.
52. *Достаточное условие зависимости системы функций.
53. Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума.
54. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных.
55. Отыскание наименьшего и наибольшего значений функции.
56. Понятие условного экстремума функции нескольких переменных. Метод множителей Лагранжа. Необходимые условия условного экстремума.
57. Достаточные условия условного экстремума в терминах функции Лагранжа (без доказательства).
58. Понятие числового ряда. Сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд.
59. Линейность операции суммирования. Свойства остатка числового ряда.
60. Монотонность операции суммирования. Критерий Коши сходимости числового ряда. Ассоциативность операции сложения.
61. Необходимое и достаточное условие сходимости положительного ряда. Теорема сравнения в общей форме.
62. Теорема сравнения в предельной форме
63. Интегральный признак сходимости числового ряда. Обобщенный гармонический ряд. Специальная теорема сравнения.
64. Признаки Коши и Даламбера сходимости положительного числового ряда.
65. *Признак Раабе сходимости положительного числового ряда.

66. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость числового ряда. Признак Лейбница.
67. *Преобразование Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числового ряда.
68. Теоремы о перестановке членов положительного ряда и абсолютно сходящегося числового ряда.
69. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящихся рядов (без доказательства). Пример.
70. Понятие произведения рядов. Теорема об умножении абсолютно сходящихся рядов.
71. *Теорема Мертенса о произведении рядов в форме Коши.
72. *Теорема Абеля о произведении рядов в форме Коши.

73. *Понятие бесконечного произведения. Сходимость произведения. Необходимое условие сходимости. Свойства остаточного произведения.
74. *Связь бесконечных произведений с рядами. Абсолютная сходимость произведения.
75. *Определение Γ -функции Эйлера через бесконечное произведение. Связь с факториалом.
76. *Разложение синуса в бесконечное произведение.
77. *Формула дополнения для Γ -функции.

Доказательства теорем, отмеченных символом *, не включены в программу-минимум. Эти доказательства обязательны для получения оценки "отлично". Знание определений и формулировок теорем необходимо.