

**Программа экзамена по математическому анализу для студентов
1 курса ФИЗМЕХа (гр. 5030102/40001, 5030102/40002,
5030102/40003, 5030102/40004, 5030103/40001, 5030103/40002,
5030103/40003, 5030103/40004)
1 семестр 2024/25 уч.г.**

Лектор – доц. Моисеев А.А.

1. Множества. Отношение включения. Операции над множествами. Формулы дополнения де Моргана.
2. Понятие отображения. Образ и прообраз множества.
3. Сюръективные и инъективные отображения. Обратное отображение. Композиция отображений. График.
4. Множество вещественных чисел. Арифметические операции. Отношение порядка.
5. Аксиома полноты. Границы числовых множеств. Ограниченные множества. Теорема о существовании граней.
6. Абсолютная величина вещественного числа. Основные свойства.
7. Натуральные числа. Принцип математической индукции. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Принцип Архимеда.
8. Целые числа. Рациональные числа. Плотность множества рациональных чисел.
9. Понятие мощности множества. Теорема Шредера-Бернштейна (без док-ва).
10. Теорема Кантора о множестве подмножеств данного множества.
11. Конечные и счетные множества. Счетность \mathbb{N}^2 и \mathbb{Q} .
12. Мощность континуума. Несчетность \mathbb{R} . Равномощность \mathbb{R} и $P(\mathbb{N})$.
13. Числовые последовательности. Ограниченные последовательности. Определения предела последовательности на ε -языке и языке окрестностей.
14. Простейшие свойства предела последовательности. Предел подпоследовательности.
15. Арифметические операции над сходящимися последовательностями.
16. Свойства предела последовательности, связанные с неравенствами.
17. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Их основные свойства. Неопределенности. Расширенное множество вещественных чисел.
18. Сходимость монотонных последовательностей. Теорема о вложенных отрезках.
19. Свойства последовательности $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}$. Число e .
20. Понятия нижнего и верхнего пределов. Теорема об условии сходимости в терминах верхнего и нижнего пределов.
21. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости числовой последовательности.
22. Различные определения предела функции. Их равносильность.
23. Односторонние пределы функции, предел на бесконечности, бесконечные пределы.
24. Предел функции и неравенства. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.
25. Сравнение бесконечно малых. Основные определения. Теорема о замене сомножителей на эквивалентные. Необходимое и достаточное условие эквивалентности.
26. Предел монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции.
27. Понятие непрерывной функции. Приращение функции. Односторонняя непрерывность.
28. Точки разрыва функции. Их классификация. Примеры.
29. Локальные свойства непрерывных функций.
30. Теорема о непрерывности композиции. Предел композиции.

31. Внутренние, внешние и граничные точки. Открытые и замкнутые множества. Описание замкнутости в терминах последовательностей.
32. Понятие компакта. Теорема о компактности ограниченного замкнутого множества.
33. Теорема о непрерывном образе компакта. Теоремы Вейерштрасса о функциях, непрерывных на отрезке.
34. Теоремы Коши об обращении непрерывной функции в нуль и о промежуточном значении непрерывной функции.
35. Условия непрерывности монотонной функции. Обращение строго монотонной функции.
36. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора.
37. Степенная функция с натуральным показателем, корень n -степени, их непрерывность.
38. Построение показательной функции, ее непрерывность.
39. Логарифмическая функция. Степенная функция с произвольным вещественным показателем.
40. Непрерывность тригонометрических функций. I замечательный предел.
41. II замечательный предел. Следствия.
42. Понятие производной. Непрерывность функции, имеющей производную. Односторонние производные.
43. Понятие дифференцируемой функции. Дифференциал. Равносильность свойств дифференцируемости и существования производной.
44. Теоремы о дифференцируемости суммы, произведения, частного дифференцируемых функций.
45. Теорема о производной обратной функции. Вычисление производных обратных тригонометрических функций.
46. Теорема о дифференцируемости композиции. Инвариантность формы дифференциала.
47. Таблица производных.
48. Геометрический и механический смысл производной и дифференциала. Уравнение касательной к графику функции.
49. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
50. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно.
51. Теоремы Ферма и Ролля.
52. Теоремы Лагранжа и Коши.
53. Теорема о пределе производной. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной.
54. Правило Лопиталья раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$.
55. Правило Лопиталья раскрытия неопределенности $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.
56. Многочлен Тейлора. Предложение о производных многочлена Тейлора.
57. Лемма о порядке малости функции с нулевыми производными. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
58. Разложения основных элементарных функций по формуле Тейлора.
59. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.
60. Условия постоянства и монотонности функции в терминах производной.
61. Экстремум функции. Необходимые условия, достаточные условия экстремума в терминах первой производной.
62. Достаточные условия экстремума в терминах второй производной. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции.
63. Понятие выпуклой функции. Геометрическая интерпретация.
64. Неравенство для угловых коэффициентов хорд графика выпуклой функции. Непрерывность выпуклой функции.
65. Условия выпуклости функции в терминах производных.
66. Условия выпуклости в терминах касательных. Точки перегиба.
67. Общее неравенство Йенсена. Неравенство Гельдера.
68. Асимптоты графика функции. Отыскание асимптот.

69. Понятие вектор-функции. Координатные функции. Предел и непрерывность.
70. Дифференцирование вектор-функций. Теорема Лагранжа, Формула Тейлора для вектор-функций.
71. Путь в пространстве и на плоскости. Эквивалентные и встречные пути. Гладкий путь. Касательная.
72. Понятие длины пути. Спрямолинейность гладкого пути. Дифференцируемость длины гладкого пути.
73. Теорема о дифференцируемости длины пути. Естественная параметризация.
74. Кривизна пути на плоскости. Определение, формулы для вычисления.
75. Кривизна и кручение пути в пространстве. Формулы Френе.
76. Формулы для вычисления кривизны и кручения пути в пространстве.