

**ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ для студентов 2 курса
Физмеха (гр. 5030102/40001, 5030102/40002, 5030102/40003, 5030102/40004,
5030103/40001, 5030103/40002, 5030103/40003, 5030103/40004)**

(3 семестр) 2025/26 уч.г., лектор – доц. Моисеев А.А.

1. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности. Условие равномерной сходимости в терминах величины ρ_n . Критерий Коши.
2. Понятие равномерной сходимости функционального ряда. Необходимое условие. Условие равномерной сходимости в терминах остатка. Критерий Коши.
3. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Признак Лейбница.
4. Признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функционального ряда (без доказательства).
5. Теоремы о непрерывности предельной функции равномерно сходящейся функциональной последовательности и суммы равномерно сходящегося функционального ряда.
6. Теорема Дини о равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда.
7. Теоремы о почленном предельном переходе для равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов.
8. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
9. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

10. Понятие степенного ряда. Первая теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
11. Равномерная сходимость степенного ряда на отрезке интервала сходимости. Вторая теорема Абеля. Непрерывность суммы степенного ряда.
12. Почленное дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
13. Ряд Тейлора. Единственность представления функции степенным рядом.
14. Условия разложимости функции в ряд Тейлора.
15. Разложение в ряд Тейлора показательной и тригонометрических функций.
16. Разложение в ряд Тейлора степенной функции (биномиальный ряд), логарифмической функции.
17. Разложение в ряд Тейлора гиперболического синуса и гиперболического косинуса.
18. Формула Стирлинга.
19. Разложение арктангенса и арксинуса в ряд Тейлора.
20. Действия над степенными рядами: линейная комбинация и умножение. Подстановка ряда в ряд (без доказательства).

21. Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Решение уравнения. Задача Коши.
22. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Нарушение единственности для уравнения вида $y' = f(y)$. Понятие особого решения.
23. Однородное уравнение первого порядка. Дифференциальное уравнение, сводящееся к однородному.
24. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, уравнение Бернулли.
25. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
26. Теорема о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (формулировка теоремы, сведение задачи Коши к интегральному уравнению).
27. Теорема о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (формулировка теоремы, построение последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательных приближений решения).
28. Теорема о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка (формулировка, равномерная сходимость последовательности приближений решения, предельный переход).

29. Лемма о дифференциальном неравенстве.
30. Теорема единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
31. Продолжение решений дифференциального уравнения. Теорема о существовании и единственности непродолжимого решения.
32. Непродолжимые решения дифференциального уравнения. Теорема о выходе непродолжимого решения из компакта.
33. Непродолжимые решения почти линейного уравнения.
34. Гладкость решения дифференциального уравнения.
35. Теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметров.
36. Теорема о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от начальных условий.

37. Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной. Задача Коши. Существование и единственность решения. Особое решение.
38. Интегрирование дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.
39. Огибающая однопараметрического семейства кривых.

40. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные определения. Задача Коши. Существование и единственность решения (без доказательства).
41. Понижение порядка дифференциального уравнения.

42. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Существование и единственность решения (без доказательства).
43. Линейное однородное дифференциальное уравнение. Простейшие свойства. Линейный дифференциальный оператор. Теорема о линейности множества решений.
44. Линейная зависимость системы функций. Определитель Вронского. Необходимое условие линейной зависимости.
45. Линейная зависимость системы решений линейного однородного дифференциального уравнения. Альтернатива Вронского.
46. Теорема о размерности пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения. Фундаментальная система решений. Общее решение.
47. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения высшего порядка. Метод вариации произвольных постоянных.
48. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Комплексные решения. Характеристический многочлен.
49. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений в случае характеристического многочлена с простыми корнями.
50. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений в случае характеристического многочлена с кратными корнями.
51. Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Построение вещественной фундаментальной системы решений.
52. Метод неопределенных коэффициентов отыскания решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

53. Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные определения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы (без доказательства).
54. Взаимосвязь нормальной системы и дифференциального уравнения n -го порядка. Метод исключения.
55. Линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Матричная запись. Существование и единственность решения.

56. Линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Пространство решений. Определитель Вронского. Альтернатива Вронского.
57. Линейная однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Размерность пространства решений. Фундаментальная система решений. Общее решение.
58. Линейная неоднородная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
59. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений в случае простых корней характеристического уравнения.
60. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений в случае кратных корней характеристического уравнения.
61. Линейная однородная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение вещественной фундаментальной системы решений.
62. Построение частного решения для линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.