ЗАНЯТИЕ 3 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейные интегралы 1 рода

На плоскости:

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \int_\Gamma f dl=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t),\psi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt .$$

В пространстве:

$$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases} \int_\Gamma f dl=\int_\alpha^\delta f\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt .$$

$L=\int_\Gamma dl=\int_\Gamma f dl=\int_\alpha^\delta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt$ — длина пути.

Вычислите криволинейные интегралы 1-го рода:

4221. $\int_\Gamma (x+y)dl\;\; O(0,0), A(1,0), B(0,1)$.

Ответ: $\sqrt{2}+1$.

4225. $I=\int_\Gamma \left(x^{4/3}+y^{4/3}\right)dl,\ \Gamma: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Ответ: $4a^{7/3}$.

4229. $I=\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}dl,\ \Gamma:\ x^2+y^2=ax$.

Ответ: $2a^2$.

Найдите длину дуги пространственной кривой:

4232. $x=e^{-t}\cos t, y=e^{-t}\sin t, z=e^{-t}$;

ОТВЕТ: $\sqrt{3}$.

4238. $\int_\Gamma x^2 dl,\ \Gamma: x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.

Ответ: $\frac{2}{3}\pi a^3$.

4241.2. Найдите массу дуги параболы

$y^2 = 2px,\;\; \rho = |y|,\; 0 \le x \le \frac{p}{2}$.

Ответ: $\frac{2}{3}p^2\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

4243. Найдите центр масс дуги циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right), y = a\left(1 - \cos t\right),\; 0 \le t \le \pi$.

Ответ: $x_0 = y_0 = \frac{4}{3}a$.

Криволинейные интегралы 2 рода

На плоскости:

$$\Gamma:\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)dt.$$

При изменении направления обхода интеграл меняет свое значение на противоположное.

$$\Gamma: y = \varphi(x),\; \int\limits_{\Gamma} P\,dx = \int\limits_{a}^{b} P\big(x,\psi(x)\big)\,dx,$$

$$\Gamma: x = x_0,\; \int\limits_{\Gamma} P\,dx = 0.$$

В пространстве:

$$\Gamma:\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\psi'(t) + R\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\chi'(t)\Big)dt$$

Вычислите криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

4251. $I = \int\limits_{\Gamma}\left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy,\;\; y = 1 - |1 - x|,\; 0 \le x \le 2$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

4254. $\int\limits_{\Gamma}\frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2},\; \Gamma: x^2 + y^2 = a^2$.

Ответ: (-2π).

4256. $\int\limits_{\Gamma} \sin y dx + \sin x dy,\ \Gamma - \text{отрезок с концами } A(0,\pi), B(\pi,0)$.

Ответ: 0.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, ычислите криволинейный интеграл:

4264. $\int\limits_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Ответ: 9.

4273. Найдите первообразную, если $dz = \frac{(x^2+2xy+5y^2)dx + (x^2-2xy+y^2)dy}{(x+y)^3}$

Ответ: $z = \ln(x+y) - \frac{2y^2}{(x+y)^2}$

4283.

$$\int\limits_{\Gamma} (y^2-z^2)dx + (z^2-x^2)dy + (x^2-y^2)dz,$$

$\Gamma - \text{контур части сферы } x^2+y^2+z^2=1,\ x,y,z \ge 0$

Ответ: (-4)

$$\int\limits_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} (2x+y+z^2+y^2z)dx + (1+x+2xyz+z^3)dy + (3z^2+2xz+xy^2+3yz^2)dz$$

Ответ: 107

4292. Найдите первообразную, если $du = \frac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{(x+y)^2+z^2}$

Ответ: $u = \frac{1}{2}\ln\left((x+y)^2+z^2\right) + \operatorname{arctg}\frac{z}{x+y} + C$

Домашнее задание

Вычислите криволинейные интегралы 1-го рода:

4222. $\int\limits_{\Gamma} y^2 dl$, где Γ — арка циклоиды $x = a\left(t - \sin t\right),\ y = a\left(1 - \cos t\right)\ \left(0 \le t \le 2\pi\right)$.

Ответ: $\dfrac{256}{15}a^3$.

4224. $\int\limits_{\Gamma} xydl$, где Γ — дуга гиперболы $x = a\,\mathrm{ch}\,t,\ y = a\,\mathrm{sh}\,t\ \left(0 \le t \le t_0\right)$.

Ответ: $\dfrac{a^3}{6}\left(\mathrm{ch}^{3/2}\,2t_0 - 1\right)$.

Найдите длины дуг пространственных кривых

4231. $x = 3t,\ y = 3t^2,\ 2t^3$, от)$\left(0,0,0\right)$ до $A\left(3,3,2\right)$.

Ответ: 5.

Вычислите криволинейные интегралы 1-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

4237. $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)dl$, где Γ — часть винтовой линии $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ \left(0 \le t \le 2\pi\right)$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}\left(3a^2 + 4\pi^2 b^2\right)\sqrt{a^2 + b^2}$.

4239. $\int\limits_{\Gamma} zdl$, где Γ — коническая винтовая линия $x = t\cos t,\ y = t\sin t.\ z = t\ \left(0 \le t \le t_0\right)$.

Ответ: $2a^2$

4241.1 Найдите массу кривой $x = a\cos t,\ y = a\sin t\ \left(a \ge b > 0,\ 0 \le t \le 2\pi\right)$, если линейная плотность ее в точке $\left(x, y\right)$ равна $\left|y\right|$.

Ответ: $2b\left(b + a\dfrac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}\right)$, где $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

4242. Вычислите координаты центра масс дуги однородной кривой $y = a\,\mathrm{ch}\dfrac{x}{a}$ от точки $A\left(0, a\right)$ до точки $B\left(b, h\right)$.

Ответ: $x_0 = b - a\sqrt{\dfrac{h - a}{h + a}},\ y_0 = \dfrac{h}{2} + \dfrac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}$.

Вычислите криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль указанных кривых в направлении возрастания параметра:

4250. $\int\limits_{\Gamma}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$, где Γ — парабола $y=x^2$ $\left(-1\le x\le 1\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{14}{15}\right)$.

4252. $\int\limits_{\Gamma}\left(x+y\right)dx+\left(x-y\right)dy$, где Γ — эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

Ответ: 0.

Убедившись, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом, ычислите криволинейный интеграл:

4263. $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)}\frac{ydx-xdy}{x^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси Oy.

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Найдите первообразную функцию z, если

4271. $dz=\left(x^2+2xy-y^2\right)dx+\left(x^2-2xy-y^2\right)dy$.

Ответ: $z=\frac{x^3}{3}+x^2y-xy^2-\frac{y^3}{3}+C$.

Вычислите криволинейные интегралы 2-го рода, взятые вдоль пространственных кривых:

4281. $\int\limits_{\Gamma}\left(y-z\right)dx+\left(z-x\right)dy+\left(x-y\right)dz$, где Γ — окружность $x^2+y^2+z^2=a^2, y=x\,\mathrm{tg}\,\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть со стороны положительных x.

Ответ: $2\pi\sqrt{2}a^a\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

Вычислите криволинейный интеграл от полного дифференциала:

4285. $\int\limits_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yzdx+zxdy+xydz$.

Ответ: 0.

Найдите первообразную функцию u, если

4290. $du = \left(x^2 - 2yz\right)dx + \left(y^2 - 2xz\right)dy + \left(z^2 - 2xy\right)dz$.

Ответ: $u = \frac{1}{3}\left(x^3 + y^3 + z^3\right) - 2xyz + C$.

4292. $\frac{\left(x + y - z\right)dx + \left(x + y - z\right)dy + \left(x + y + z\right)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}$.

Ответ: $u = \ln\sqrt{\left(x + y\right)^2 + z^2} + \operatorname{arctg}\frac{z}{x + y} + C$.