Занятие 5 продолжение.

Формула Стокса

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy =$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Вычислите интегралы с помощью формулы Стокса и непосредственно.

1. $\oint\limits_{\Gamma: x^2+y^2+z^2=3,\ x+y+z=2} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz$. Ответ: $-\frac{40}{3\sqrt{3}}\pi$.

2.

$\oint\limits_{\Gamma} (x+z)\,dx + (x-y)\,dy + x\,dz,$

Γ - эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = c,$ ориентированный положительно относительно вектора $(0,0,1)$. Ответ: πab.

3.

$\int\limits_{\Gamma} x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz,$

$x = a\sin t,\ y = a\cos t,\ z = a(\sin t + \cos t),\ t \in [0, 2\pi].$ Ответ: $-\pi a^2$.

4.

$\int\limits_{\Gamma} y\,dx + z\,dy + x\,dz,$

Γ − окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + y + z = 0.$ Ответ: $-\sqrt{3}\pi a^2$.

5.

$\int\limits_{\Gamma} \left(y^2 - z^2\right) dx + \left(z^2 - x^2\right) dy + \left(x^2 - y^2\right) dz,\ \Gamma$ — кривая пересечения поверхности куба $|x|, |y|, |z| \le a$ плоскостью $x + y + z = \frac{3a}{2}$. Ответ: $-\frac{27}{4}a^3$.

4370, 4371, 4373.