Поверхностные интегралы I рода (дополнение)

$$\iint_S F d\sigma = \iint_E F\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

1. Вычислите интеграл $\iint_S \left(x+y+z\right)d\sigma$ по поверхности S тетраэдра $x, y, z \geq 0,\ x+y+z \leq a$.

Решение $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 3I_1 + I_4$,

$$I_1 = \iint_{E:x,y\geq 0,x+y\leq a} \left(x+y\right)dxdy = 2\iint_E ydxdy = 2\cdot\frac{a^3}{2\cdot 3} = \frac{a^3}{3},$$

$$I_4 = \iint_S \left(x+y+z\right)d\sigma = \iint_S ad\sigma = a\sqrt{3}\frac{a^2}{2} = a^3\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$I = a^3\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Вычислите интеграл $\iint_S \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)d\sigma$ по поверхности S тетраэдра $x, y, z \geq 0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} \leq 1$.

Решение $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$,

$$I_1 = \iint_{E:x,y\geq 0,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1} \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)dxdy\begin{bmatrix} x = au \\ y = bv \end{bmatrix} = ab\iint_{E_1:u,v\geq 0,u+v\leq 1} \left(u+v\right)dudv = \frac{ab}{3},$$

$$I_4 = \iint_{S_4} d\sigma = \left[z = c\left(1-\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right] = \iint_{E:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leq 1} \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}dxdy = \sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

ОТВЕТ: $\frac{1}{3}\left(bc+ca+ab\right)+\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$.

3. Вычислите интеграл $\iint_S \left(x^2+2y^2+3z^2\right)d\sigma$ по поверхности S тетраэдра $x, y, z \geq 0,\ x+y+z \leq a$

Решение.

$$\iint_{S_1} x^2 d\sigma = \frac{1}{12}, \iint_{S_2} x^2 d\sigma = \frac{1}{12}, \iint_{S_3} x^2 d\sigma = 0, \iint_{S_4} x^2 d\sigma = \frac{\sqrt{3}}{12};$$

$$\iint_S x^2 d\sigma = \frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{12};$$

$$\iint_S \left(x^2+2y^2+3z^2\right)d\sigma = 6\iint_S x^2 d\sigma = 1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

ОТВЕТ: $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Вычислите интеграл $\iint_S y^2 d\sigma$ по сфере $S: x^2+y^2+z^2=a^2$.

Решение.

$$\iint_S y^2 d\sigma = \frac{1}{3}\iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma = \frac{a^2}{3}\iint_S d\sigma = \frac{4\pi a^4}{3}.$$

5. Вычислите интеграл $\iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$ по поверхности призмы $x, y \ge 0,\ x+y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

Решение.

$$\iint_S x^2 d\sigma = \iint_{S,z=0} x^2 d\sigma + \iint_{S,z=1} x^2 d\sigma + \iint_{S,x=0} x^2 d\sigma + \iint_{S,y=0} x^2 d\sigma + \iint_{S,x+y=1} x^2 d\sigma =$$

$$= 2\iint_{S,z=0} x^2 d\sigma + \left(\sqrt{2}+1\right)\iint_{S,y=0} x^2 d\sigma = 2\iint_{E:x,y\ge 0,x+y\le 1} x^2 dxdy + \left(\sqrt{2}+1\right)\iint_{0\le x,z\le 1} x^2 dxy =$$

$$2\cdot\frac{1}{12} + \left(\sqrt{2}+1\right)\frac{1}{3} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\iint_S z^2 d\sigma = \iint_{S,z=0} z^2 d\sigma + \iint_{S,z=1} z^2 d\sigma + \iint_{S,x=0} z^2 d\sigma + \iint_{S,y=0} z^2 d\sigma + \iint_{S,x+y=1} z^2 d\sigma =$$

$$= \iint_{S,z=1} d\sigma + \left(2+\sqrt{2}\right)\iint_{S,x=0} z^2 d\sigma = \frac{1}{2} + \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{1}{3} = \frac{7}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$I = 1+\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{13}{6}+\sqrt{2}.$$

6. Вычислите интеграл $\iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)d\sigma$ по поверхности S цилиндра $x^2+y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

Решение.

$$\iint_S \left(x^2+y^2\right)d\sigma = \iint_{S,z=0} \left(x^2+y^2\right)d\sigma + \iint_{S,z=1} \left(x^2+y^2\right)d\sigma + \iint_{S,x^2+y^2=1} \left(x^2+y^2\right)d\sigma =$$

$$= 2\iint_{S,z=0} \left(x^2+y^2\right)d\sigma + \iint_{S,x^2+y^2=1} d\sigma = 2\pi + 2\pi = 4\pi.$$

$$\iint_S z^2 d\sigma = \iint_{S, z=0} z^2 d\sigma + \iint_{S, z=1} z^2 d\sigma + \iint_{S, x^2+y^2=1} z^2 d\sigma =$$

$$= \iint_{S, z=1} d\sigma + \iint_{S, x^2+y^2=1} z^2 d\sigma = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

ОТВЕТ: $\frac{17\pi}{3}$.

7. Вычислите интеграл $\iint_S z d\sigma$ по полусфере $x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0$, пользуясь параметрическими уравнениями.

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi\cos\psi \\ y = a\sin\varphi\cos\psi \\ z = a\sin\psi \end{cases}$$

Решение_1.

$$z = \sqrt{a^2-x^2-y^2},\ d\sigma = \frac{adxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ \iint_S z d\sigma = \iint_{x^2+y^2\le a^2} adxdy = \pi a^3.$$

Решение_2

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = \left(-a\sin\varphi\cos\psi\right)^2 + \left(a\cos\varphi\cos\psi\right)^2 = a^2\cos^2\psi,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2 = \left(-a\cos\varphi\sin\psi\right)^2 + \left(-a\sin\varphi\sin\psi\right)^2 + \left(a\cos\psi\right)^2 = a^2,$$

$$F = 0,$$

$$\sqrt{EG-F^2} = a^2\cos\psi.$$

$$\iint_S z d\sigma = \iint_{0\le\varphi\le 2\pi, 0\le\psi\le\frac{\pi}{2}} a^3 \sin\psi\cos\psi d\varphi d\psi = 2\pi a^3 \frac{1}{2} = \pi a^3.$$

9. 4352.1.

Решение.

$$m = \iint\limits_{S: z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right), 0\le z\le 1} z d\sigma = \iint\limits_{E: x^2+y^2\le 2} \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{E_1: 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le\sqrt{2}} \frac{1}{2} r^3\sqrt{1+r^2}\,drd\varphi = \pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^2 \rho\sqrt{1+\rho}\,d\rho =$$

$$= \left[u=\sqrt{1+\rho}, \rho = u^2-1\right] = \pi\int\limits_1^{\sqrt{3}}\left(u^2-1\right)u^2du = \pi\left(\frac{1}{5}\left(9\sqrt{3}-1\right)-\frac{1}{3}\left(3\sqrt{3}-1\right)\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{5}\sqrt{3}+\frac{2}{15}\right).$$

10. 4352.3.

Найдите статические моменты однородной треугольной пластины

$$x+y+z=a,\ x,y,z\ge 0\,.$$

Решение. $M_x = M_y = M_z = \iint\limits_S x d\sigma = \sqrt{3}\iint\limits_{x,y\ge 0, x+y\le a} xdxdy = \sqrt{3}\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

11.4355 б) Найдите координаты центра масс однородной поверхности

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\ \ \left(x\ge 0, y\ge 0, x+y\le a\right).$$

Решение.

$$m = \iint\limits_S d\sigma = \iint\limits_{E: x,y\ge 0,\ x+y\le a} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} =$$

$$= a\int\limits_0^a dx \arcsin\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{a-x} = a\int\limits_0^a \arcsin\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= a\int\limits_0^a \arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx = a\left(x\arcsin\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\Bigg|_0^a - \int\limits_0^a x\frac{1}{\sqrt{1-\frac{a-x}{a+x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}\frac{-2a}{\left(a+x\right)^2}\,dx\right) =$$

$$= a^2\int\limits_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{a-x}}\frac{1}{\left(a+x\right)}\,dx = \left[x = a\sin^2 t\right] = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{a}\sin t}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{a}\cos t}\frac{1}{a\left(1+\sin^2 t\right)}2a\sin t\cos t dt =$$

$$= a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 t}{1+\sin^2 t}\,dt = a^2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\left(1-\frac{1}{1+\sin^2 t}\right)dt = a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}\right) =$$

$$= a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{2\,\mathrm{tg}^2\, t+1}\frac{dt}{\cos^2 t}\right) = a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{2u^2+1}\,du\right) = a^2\sqrt{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{a^2\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

$$M_y=\iint\limits_S yd\sigma=\iint\limits_{E:x,y\geq 0,\ x+y\leq a}\frac{ay}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{a-x}\frac{ydy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=a\int\limits_0^a dx\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\Big|_0^{a-x}=a\int\limits_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-x^2-(a-x)^2}\right)dx=$$

$$=a\int\limits_0^a\left(\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{2ax-2x^2}\right)dx=a\left(\frac{\pi a^2}{4}-\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{2}\sqrt{a}\sin t\sqrt{a}\cos t\ 2\sin t\cos tdt\right)=$$

$$=a^3\left(\frac{\pi}{4}-2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 tdt\right)=a^3\left(\frac{\pi}{4}-2\sqrt{2}\frac{\pi}{16}\right)=a^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

$$M_z=\iint\limits_S zd\sigma=\iint\limits_{E:x,y\geq 0,\ x+y\leq a}\frac{a\sqrt{a^2-x^2-y^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_E adxdy=\frac{a^3}{2}.$$

ОТВЕТ: $x_0=y_0=\dfrac{a}{2\sqrt{2}},z_0=\dfrac{a}{\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}=a\dfrac{\sqrt{2}+1}{\pi}$.

12. 4356.2. Найдите моменты инерции

$$\left(\iint\limits_S x^2d\sigma,\ \iint\limits_S y^2d\sigma,\ \iint\limits_S z^2d\sigma\right)$$

однородной треугольной пластины $x+y+z=1\ (x,y,z\geq 0)$.

Решение.

$$\iint\limits_S x^2d\sigma=\iint\limits_{E:x,y\geq 0,x+y\leq 1}x^2\sqrt{3}dxdy=\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$