

## Поверхностные интегралы I рода (Дополнение)

$$\iint_S F d\sigma = \iint_E F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

1. Вычислите интеграл  $\iint_S (x + y + z) d\sigma$  по поверхности  $S$  тетраэдра  $x, y, z \geq 0, x + y + z \leq a$ .

**Ответ:**  $a^3 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

2. Вычислите интеграл  $\iint_S \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) d\sigma$  по поверхности  $S$  тетраэдра  $x, y, z \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1$ .

**ОТВЕТ:**  $\frac{1}{3}(bc + ca + ab) + \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ .

3. Вычислите интеграл  $\iint_S (x^2 + 2y^2 + 3z^2) d\sigma$  по поверхности  $S$  тетраэдра  $x, y, z \geq 0, x + y + z \leq a$

**ОТВЕТ:**  $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4. Вычислите интеграл  $\iint_S y^2 d\sigma$  по сфере  $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Ответ:**  $\frac{4\pi a^4}{3}$ .

5. Вычислите интеграл  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$  по поверхности призмы  $x, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .

**Ответ:**  $\frac{13}{6} + \sqrt{2}$ .

6. Вычислите интеграл  $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$  по поверхности  $S$  цилиндра  $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ .

**Ответ:**  $\frac{17\pi}{3}$ .

7. Вычислите интеграл  $\iint_S z d\sigma$  по полусфере  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$ , пользуясь параметрическими

уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \cos \psi \\ y = a \sin \varphi \cos \psi \\ z = a \sin \psi \end{cases}$$

**Ответ:**  $\pi a^3$ .

8. 4351. Докажите формулу Пуассона

$$\iint_S f(ax + by + cz) d\sigma = 2\pi \int_{-1}^1 f(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

где  $S$  — сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

9. 4352.1. Найдите массу параболической оболочки  $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), плотность которой меняется по закону  $\rho = z$ .

**Ответ:**  $\pi \left( \frac{4}{5} \sqrt{3} + \frac{2}{15} \right)$ .

10. 4352.3. Найдите статические моменты однородной треугольной пластины

$$x + y + z = a, \quad x, y, z \geq 0.$$

**Ответ:**  $M_x = M_y = M_z = \frac{a^3}{2\sqrt{3}}$ .

11. 4355 б) Найдите координаты центра масс однородной поверхности

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq a).$$

**Ответ:**  $x_0 = y_0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}, z_0 = a \frac{\sqrt{2} + 1}{\pi}$ .

12. 4356.2 Найдите моменты инерции треугольной пластины  $x + y + z = 1$  ( $x, y, z \geq 0$ ) относительно координатных плоскостей.

**Ответ:**  $\frac{1}{4\sqrt{3}}$ .

ДЗ 4352.1, 4353, 4355 а), 4356.1.