ФОРМУЛА ГРИНА

4297, 4298; 4309, 4312

4297. Вычислите криволинейный интеграл

$$I = \oint_K (x+y)^2\,dx - \left(x^2+y^2\right)dy,$$

Где K — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника ABC с вершинами $A(1,1); B(3,2)C(2,5)$.

По формуле Грина

$$I = \iint_E (-4x-2y)\,dxdy,$$

где E — треугольник ABC.

Выполняя замену переменных по формулам $x = u+1, y = v+1$, получаем

$$I = \iint_{E'} (-4u-2v-6)\,dudv,$$

Где E' — треугольник с вершинами $A'(0,0), B'(2,1), C'(1,4)$.

Выполняя замену переменных по формулам

$$\begin{cases} s = u-2v \\ t = 4u-v \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{2t-s}{7} \\ v = \dfrac{t-4s}{7} \end{cases} \quad J = \frac{1}{7},$$

получаем

$$I = \iint_{E''} \left(-4\frac{2t-s}{7} - 2\frac{t-4s}{7} - 6\right)\frac{1}{7}\,dtds = \iint_{E''} \left(\frac{-10t+12s}{7} - 6\right)\frac{1}{7}\,dtds,$$

Где E'' — треугольник с вершинами $A''(0,0), B''(0,7), C''(-7,0)$.

Замена $s = -7\xi,\ t = 7\eta$ дает

$$I = 7\iint_{\xi,\eta\ge 0;\ \xi+\eta\le 1} (-10\xi - 12\eta - 6)\,d\xi d\eta = 7\left(\frac{-22}{2\cdot 3} - 3\right) = 7\left(\frac{-11}{3} - 3\right) = -\frac{140}{3}.$$

Проведем прямые вычисления

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\ x=2y-1$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}(x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{\Gamma_1}(x+y)^2\,2dy-\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_1^2\left(x^2+4xy+y^2\right)dy=$$

$$=\int\limits_1^2\left((2y-1)^2+4(2y-1)y+y^2\right)dy=\int\limits_1^2\left(13y^2-8y+1\right)dy=\left[y=u+1\right]=$$

$$=\int\limits_0^1\left(13(u+1)^2-8(u+1)+1\right)dy=\int\limits_0^1\left(13u^2+18u+6\right)dy=\frac{13}{3}+9+6=\frac{58}{3}$$

$$y=-3x+11$$

$$\int\limits_{\Gamma_2}(x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{\Gamma_2}\left((x+y)^2+3\left(x^2+y^2\right)\right)dx=\int\limits_{\Gamma_2}\left(4x^2+2xy+4y^2\right)dx=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_2}\left(4x^2+2x(-3x+11)+4(-3x+11)^2\right)dx=-\int\limits_2^3\left(34x^2-242x+484\right)dx=\left[x=u+2\right]=$$

$$=-\int\limits_0^1\left(34(u+2)^2-242(u+2)+484\right)du=-\int\limits_0^1\left(34u^2-106u+136\right)du=-\left(\frac{34}{3}-53+136\right)=-\frac{283}{3}$$

$$y=4x-3$$

$$\int\limits_{\Gamma_3}(x+y)^2dx-\left(x^2+y^2\right)dy=\int\limits_{\Gamma_3}\left((x+y)^2-4\left(x^2+y^2\right)\right)dx=\int\limits_{\Gamma_3}\left(-3x^2+2xy-3y^2\right)dx=$$

$$=-\int\limits_1^2\left(-3x^2+2x(4x-3)-3(4x-3)^2\right)dx=-\int\limits_1^2\left(-43x^2+66x-27\right)dx=\left[x=u+1\right]=$$

$$=-\int\limits_0^1\left(-43(u+1)^2+66(u+1)-27\right)dx=-\int\limits_0^1\left(-43u^2-20u-4\right)dx=-\left(-\frac{43}{3}-10-4\right)=\frac{85}{3}$$

$$I=\frac{58}{3}-\frac{283}{3}+\frac{85}{3}=\frac{143-283}{3}=-\frac{140}{3}$$

С помощью криволинейных интегралов вычислите площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

4309. $x=a\cos^3t,\ y=a\sin^3t\ \left(0\le t\le 2\pi\right)$ (астроида).

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$$

$$S = 2\int xdy - ydx = 2\int_0^{\pi/2} 3a^2\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right)dt =$$

$$= 6a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin^2 tdt = 6a^2\frac{1}{4!!}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

4312 $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)$

$$y = x\operatorname{tg}\varphi$$

$$\frac{x^4}{\cos^4\varphi} = a^2x^2\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$x^2 = a^2\cos 2\varphi\cos^2\varphi$$

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi,\ y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi$$

$$dx = a\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\cos\varphi - \sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\right)$$

$$dy = a\left(-\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sin\varphi + \sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$xdy - ydx = a^2\cos 2\varphi d\varphi$$

$$S = a^2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2$$

4036. Найдите площадь части поверхности $az = xy$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$.

$$az = xy, x^2+y^2 \le a^2;\ \ z = \frac{xy}{a}$$

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{1+\frac{y^2+x^2}{a^2}}dxdy = a^2\iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi\\ 0\le r\le 1}}\sqrt{1+r^2}rdr =$$

$$= 2\pi a^2\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi a^2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

4038. Найдите площадь части сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(b \le a\right)$.

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$$

$$S=2\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy=2a\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=2a\iint\limits_{r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)\le 1}\frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}=8a\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=$$

$$=8a\int_0^{\pi/2}d\varphi\left(-\sqrt{a^2-r^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}}=8a\int_0^{\pi/2}\left(a-\sqrt{a^2-\frac{1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}\right)d\varphi=$$

$$=8a\int_0^{\pi/2}\left(a-\sqrt{\frac{\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi-1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}\right)d\varphi=8a\int_0^{\pi/2}\left(a-\sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi-\sin^2\varphi}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}\right)d\varphi=$$

$$=8a\left(\frac{\pi}{2}a-\int_0^{\pi/2}\left(\sqrt{\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}}\right)\sin\varphi d\varphi\right)=8a\left(\frac{\pi}{2}a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\int_0^1\frac{du}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2}+\frac{1-u^2}{b^2}}}\right)=$$

$$=8a\left(\frac{\pi}{2}a-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\int_0^1\frac{abdu}{\sqrt{a^2-u^2\left(a^2-b^2\right)}}\right)=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^1\frac{abdu}{\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}-u^2}}\right)=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{u\sqrt{a^2-b^2}}{a}\Bigg|_0^1\right)=$$

$$=8a^2\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)=8a^2\arccos\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=8a^2\arcsin\frac{b}{a}$$

4045 б) Найдите площадь части поверхности $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}+z=1$, отсекаемой плоскостью $z=0$.

$$z=1-\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$$

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+9\left(x^2+y^2\right)x^2+9\left(x^2+y^2\right)y^2}\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{1+9\left(x^2+y^2\right)^2}\,dxdy=2\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+9r^4}\,rdr=$$

$$=\pi\int\limits_0^1\sqrt{1+9u^2}\,du=\frac{\pi}{3}\int\limits_0^3\sqrt{1+v^2}\,dv=\frac{\pi}{6}\left(3\sqrt{10}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right)$$

4045 г) Найдите площадь части поверхности $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$, вырезанной поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \left(z\ge 0\right)$/

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\right),z\ge 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{b}$$

$$d\sigma=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$$

$$S=\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}\ge 0}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy=4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}ab\int\limits_0^1 r\sqrt{1+r^2}\,dr=$$

$$=4ab\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{3}\left(1+r^2\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b}{a}}}{3}ab\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

4342. Вычислите интеграл

$$\iint\limits_S zd\sigma,$$

где S — часть поверхности $x^2+z^2=2az\ \left(a>0\right)$, вырезанная поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$x^2+z^2=2az,$$
$$x^2+y^2=z^2,\ x^2=z^2-y^2$$
$$2z^2-y^2=2az,\ 2\left(z-\frac{a}{2}\right)^2-y^2=\frac{a^2}{2}$$

На плоскость Oyz поверхность S проектируется в фигуру E, ограниченную гиперболой $2z^2-y^2=2az$ и отрезком $z=2a$.

$$x^2+z^2=2az,\ x=\pm\sqrt{2az-x^2},\ d\sigma=\sqrt{1+\frac{(a-z)^2}{2az-x^2}}dydz=\frac{adydz}{\sqrt{2az-z^2}}.$$

$$\iint\limits_S zd\sigma=2a\iint\limits_E\sqrt{\frac{z}{2a-z}}dydz=2a\int\limits_a^{2a}\sqrt{\frac{z}{2a-z}}dz\int\limits_{-\sqrt{2z^2-2az}}^{\sqrt{2z^2-2az}}dy=$$

$$=4a\int\limits_a^{2a}\sqrt{\frac{z}{2a-z}}\sqrt{2z^2-2az}dz=4\sqrt{2}a\int\limits_a^{2a}z\sqrt{\frac{z-a}{2a-z}}dz=[u=z-a]=$$

$$=4\sqrt{2}a\int\limits_0^a(a+u)\sqrt{\frac{u}{a-u}}du=[u=av]=4\sqrt{2}a^3\int\limits_0^1(1+v)\sqrt{\frac{v}{1-v}}dv=$$

$$=\left[u=\sin^2 t\right]=8\sqrt{2}a^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+\sin^2 t\right)\frac{\sin t}{\cos t}\sin t\cos tdt=8\sqrt{2}a^3\int\limits_0^{\pi/2}\left(1+\sin^2 t\right)\sin^2 tdt=$$

$$=8\sqrt{2}a^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{16}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{2}\pi a^3.$$