

## ЗАНЯТИЕ 3 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### Криволинейные интегралы 1 рода

На плоскости:

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \int_{\Gamma} f dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

В пространстве:

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \int_{\Gamma} f dl = \int_{\alpha}^{\delta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

$$L = \int_{\Gamma} dl = \int_{\Gamma} f dl = \int_{\alpha}^{\delta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt \text{ — длина пути.}$$

$$4221. \int_{\Gamma} (x+y) dl \quad O(0,0), A(1,0), B(0,1).$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{2} + 1.$$

$$4225. \quad I = \int_{\Gamma} (x^{4/3} + y^{4/3}) dl, \Gamma: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

$$\text{Ответ: } 4a^{7/3}.$$

$$4229. I = \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl, \Gamma: x^2 + y^2 = ax.$$

$$\text{Ответ: } 2a^2.$$

Найдите длину дуги пространственной кривой:

$$4232. x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t};$$

$$\text{ОТВЕТ: } \sqrt{3}.$$

$$4238. \int_{\Gamma} x^2 dl, \Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} \pi a^3.$$

4241.2. Найдите массу дуги параболы

$$y^2 = 2px, \quad \rho = |y|, \quad 0 \leq x \leq \frac{p}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3} p^2 (2\sqrt{2} - 1).$$

4243. Найдите центр масс дуги циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

$$\text{Ответ: } x_0 = y_0 = \frac{4}{3} a.$$

### Криволинейные интегралы 2 рода

На плоскости:

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)) dt.$$

При изменении направления обхода интеграл меняет свое значение на противоположное.

$$\Gamma: y = \varphi(x), \quad \int_{\Gamma} P dx = \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx,$$

$$\Gamma: x = x_0, \quad \int_{\Gamma} P dx = 0.$$

В пространстве:

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)) dt \end{aligned}$$

$$4251. I = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \quad y = 1 - |1 - x|, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{3}.$$

$$4254. \int_{\Gamma} \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma: x^2 + y^2 = a^2.$$

$$\text{Ответ: } (-2\pi).$$

4256.  $\int_{\Gamma} \sin y dx + \sin x dy$ ,  $\Gamma$  – отрезок с концами  $A(0, \pi), B(\pi, 0)$ .

Ответ: 0.

4264.  $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Ответ: 9.

4273. Найдите первообразную, если  $dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}$

Ответ:  $z = \ln(x + y) - \frac{2y^2}{(x + y)^2}$

4283.  $\int_{\Gamma} (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$ ,

$\Gamma$  – контур части сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x, y, z \geq 0$

Ответ: (-4)

$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} (2x + y + z^2 + y^2z)dx + (1 + x + 2xyz + z^3)dy + (3z^2 + 2xz + xy^2 + 3yz^2)dz$

Ответ: 107

4292. Найдите первообразную, если  $du = \frac{(x + y - z)dx + (x + y - z)dy + (x + y + z)dz}{(x + y)^2 + z^2}$

Ответ:  $u = \frac{1}{2} \ln((x + y)^2 + z^2) + \operatorname{arctg} \frac{z}{x + y} + C$

Домашнее задание

4222, 4224; 4231; 4237, 4239; 4241.1, 4242;

4250, 4252:

4263, 4271, 4281, 4285, 4290, 4 292