Интегралы Эйлера

1⁰. B -функция Эйлера

Определение

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ p,q>0$$

Симметрия

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$$

Другое аналитическое выражение для B -функции

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}\,dx$$

2⁰. Γ -функция Эйлера

$$\Gamma(s)=\int\limits_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx,\ s>0.$$

Рекуррентная формула

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),$$

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi}$$

Формула дополнения для Γ -функции

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\ s\in(0,1).$$

3⁰. Связь B и Γ функций

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

3846 $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3856 $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} x \cos^{\beta-1} x dx = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{5/6} x \cos^{7/6} x dx = \frac{\pi\left(\sqrt{3}+1\right)}{12\sqrt{2}}$$

$$\int\limits_3^5 \frac{(x-3)^{7/4}(5-x)^{1/4}}{(x+1)^4} dx = \frac{7\pi}{2304\ 6^{3/4}}$$

3864 в) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\ln^2 x}{1+x^4} dx = \dfrac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$

3868 $\int\limits_0^1 \ln\Gamma(x) dx = \ln\sqrt{2\pi}$

Домашнее задание. 3847, 3848, 3851, 3863, 3864 б), 3872

Интегралы Эйлера (продолжение)

1. $A = \int\limits_{-1}^{1} \ln\dfrac{1+x}{1-x} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}} = \dfrac{2\pi^2}{3}$
2. $I = \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{\ln(x-2)}{(x^2-1)\sqrt{x-2}} dx = -\dfrac{\pi\ln 3}{2\sqrt{3}}$
3. $\int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{\operatorname{tg}^{\alpha} x\, dx}{(\sin x+\cos x)^2} dx = \dfrac{\pi\alpha}{\sin\pi\alpha},\ 0<\alpha<1$
4. $\int\limits_0^1 \dfrac{x^{p-1}+x^{q-1}}{(1+x)^{p+q}} dx = \mathrm{B}(p,q)$
5. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int\limits_0^1 \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \dfrac{\pi}{4}$
6. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$

7. $\mathrm{B}(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, p\right)$

8. $I = \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{-p}}{1-x} dx = \pi \operatorname{ctg} \pi p$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\operatorname{sh} \beta x} dx = \frac{\pi}{2\beta} \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2\beta}$