НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Равномерная сходимость

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx,\quad y\in Y$$

Несобственный интеграл I равномерно сходится на множестве Y, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta_0\ \eta>\eta_0\ \Rightarrow\forall y\in Y\ \left|\int_a^\eta f(x,y)\,dx-I(y)\right|<\varepsilon$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta_0\ \eta>\eta_0\ \Rightarrow\forall y\in Y\ \left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon$$

Если положить $\rho(\eta)=\sup\limits_{y\in Y}\left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right|$, то условие равномерной сходимости интеграла запишется в виде

$$\rho(\eta)\underset{\eta\to b-0}{\to}0.$$

Неравномерность сходимости означает, что

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\eta_0\ \exists\eta>\eta_0\ \exists y\in Y\ \left|\int_\eta^b f(x,y)\,dx\right|\geq\varepsilon.$$

Признак Вейерштрасса.

Пусть φ — положительная функция на $[a,\,b)$, интеграл $\int_a^b\varphi(x)\,dx$ сходится и

$$\forall x\in[a,b)\ \forall y\in Y\ |f(x,y)|\leq\varphi(x).$$

Тогда интеграл I равномерно сходится.

Пример 1 (3759)

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+1}.$$

а) $0 \le \alpha \le b$

Оценим остаток интеграла:

$\int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} = \int\limits_{A-\alpha}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} \le \int\limits_{A-b}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} \underset{A\to+\infty}{\to} 0$. Остаток оценен бесконечно малой, не зависящей от параметра α. Интеграл равномерно сходится.

б) $\alpha \ge 0$.

$$\sup_{\alpha\ge 0} \int\limits_A^{+\infty} \frac{dx}{(x-\alpha)^2+1} = \sup_{\alpha\ge 0} \int\limits_{A-\alpha}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \pi$$

Сходимость неравномерная.

Пример 2

$$\int\limits_1^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx$$

а) $0 \le \alpha \le b$

имеет место неравенство $0 \le x^\alpha e^{-x} \le x^b e^{-x}$, а $\int\limits_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ сходится. По признаку Вейерштрасса интеграл равномерно сходится.

б) $\alpha \ge 0$

$$\sup_{\alpha\ge 0} \int\limits_A^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = +\infty \ \left(\int\limits_A^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx > \int\limits_A^{A+1} x^\alpha e^{-x} dx \ge A^\alpha e^{-(A+1)} \underset{\alpha\to+\infty}{\to} +\infty \right)$$

Сходимость неравномерная.

Пример 3 (3762)

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx, \ \alpha \ge 0.$$

а) $\alpha \ge \alpha_0 > 0$

$$\int\limits_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \left[u = \sqrt{\alpha} x \right] = \int\limits_{A\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-u^2} du \le \int\limits_{A\sqrt{\alpha_0}}^{+\infty} e^{-u^2} du \underset{A\to+\infty}{\to} 0 .$$

Интеграл равномерно сходится.

б) $\alpha > 0$

$$\sup_{\alpha>0}\int_{A}^{+\infty}\sqrt{\alpha}e^{-\alpha x^2}dx=\sup_{\alpha>0}\int_{A\sqrt{\alpha}}^{+\infty}e^{-u^2}du=\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Сходимость неравномерная.

Теорема О непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

Пусть

1) функция f непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$,

2) интеграл I равномерно сходится на $[c,d]$.

Тогда I — непрерывная функция на $[c,d]$.

Теорема. Правило Лейбница.

Пусть f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на $[a,b)\times[c,d]$, интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

сходится в точке y_0,

$$J(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

равномерно сходится на $[c,d]$.

Тогда интеграл I равномерно сходится на $[c,d]$, функция I непрерывно дифференцируема, $I'=J$,

$$I'(y)=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

Теорема. Об интегрировании под знаком несобственного интеграла.

Пусть f непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$, интеграл

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

равномерно сходится на $[c,d]$;

$$J(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy,\ x\in[a,b).$$

Тогда интеграл $\int_a^b J(x)\,dx$ сходится и

$$\int_a^b J(x)\,dx=\int_c^d I(y)\,dy,$$

т.е.

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Формула Фруллани

Если f — непрерывная функция на $[0,+\infty)$, а $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ сходится при любом $A>0$, то

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

Пример 4

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$$

I) Применим формулу Фруллани, полагая $f(x)=e^{-x}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx=f(0)\ln\frac{2}{1}=\ln 2$$

II) $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-2x}}{x}dx.$

Подынтегральная функция $f(x,\alpha)=\frac{e^{-\alpha x}-e^{-2x}}{x}$ непрерывна при $x\ge 0,\ \alpha>0$ ($f(0,\alpha)=2-\alpha$) и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial\alpha}=-e^{-\alpha x}$. Если $\alpha\ge\alpha_0>0$, то $0<e^{-\alpha x}\le e^{-\alpha_0 x}$, а $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha_0 x}dx$ сходится. По признаку Вейерштрасса $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}dx$ равномерно сходится на $[\alpha_0,+\infty)$. $I(\alpha)$ допускает дифференцирование под знаком интеграла на $(\alpha_0,+\infty)$ при любом $\alpha_0>0$.

$I(\alpha)$ допускает дифференцирование под знаком интеграла на $(0, +\infty)$.

Итак, $I'(\alpha) = -\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{\alpha}$, $I(\alpha) = -\ln\alpha + C$. Положим $\alpha = 2$:

$0 = I(2) = -\ln 2 + C,\ C = \ln 2,\ I(\alpha) = \ln 2 - \ln\alpha$. Положим $\alpha = 1$: $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = I(1) = \ln 2$

III) $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$ равномерно сходится на $[1,\ 2]$. Допустимо интегрирование под знаком интеграла:

$$\ln 2 = \int\limits_1^2 \frac{d\alpha}{\alpha} = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_1^2 e^{-\alpha x} d\alpha \right) dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx$$

Пример 5

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x}{x} dx$$

Применим формулу Фруллани, полагая $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

($f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arctg}\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ сходится.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x}{x} dx = f(0)\ln 3 = \frac{\pi}{2}\ln 3$$

Пример 6 (3794)

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} \right)^2 dx.$$

Выполним интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-2x} - e^{-5x}}{x} \right)^2 dx = -\frac{1}{x}\left(e^{-2x} - e^{-5x}\right)^2\Big|_0^{+\infty} + 2\int\limits_0^{+\infty} \frac{\left(e^{-2x} - e^{-5x}\right)\left(-2e^{-2x} + 5e^{-5x}\right)}{x} dx =$$

$$= 10\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-7x} - e^{-10x}}{x} dx - 4\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-4x} - e^{-7x}}{x} dx = 10\ln\frac{10}{7} + 4\ln\frac{4}{7} = \ln\frac{10^{10}4^4}{7^{14}}$$

Упражнение. Вычислите интеграл с помощью дифференцирования по параметру.

Пример 7 (3797)

$$I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ \ |\alpha|\le 1$$

$$f(x,\alpha)=\frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}},\ |\alpha|\le 1,\ 0<x<1$$

Можно доопределить функцию в точке $x=0$ и установить ее непрерывность. Мы не будем этого делать, а будем считать, что несобственный интеграл имеет особые точки 0 и 1. Неравенство

$$\left|\frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|\le\left|\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|$$

и сходимость интеграла

$$\int_0^1\left|\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right|dx$$

влекут равномерную сходимость интеграла $I(\alpha),\ |\alpha|\le 1$. I —непрерывная функция на $[-1,1]$.

$\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=-\dfrac{2\alpha}{\left(1-\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна для $|\alpha|<1,\ 0<x<1$. Интеграл

$$J(\alpha)=\int_0^1\frac{2\alpha}{\left(1-\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}dx$$

равномерно сходится для $|\alpha|\le\alpha_0<1$ (благодаря неравенству $\left|\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}\right|\le\dfrac{2\alpha_0}{\left(1-\alpha_0^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$)

По теореме о дифференцировании несобственного интеграла, зависящего от параметра

$$I'(\alpha)=-J(\alpha)=-\int_0^1\frac{2\alpha}{\left(1-\alpha^2x^2\right)\sqrt{1-x^2}}dx=-2\alpha\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{1-\alpha^2\sin^2\varphi}=-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

По производной восстановим функцию I. Поскольку $I(0)=0$, то

$$I(\alpha)=-\pi\int_0^{\alpha}\frac{\beta d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\pi\sqrt{1-\beta^2}\Big|_0^{\alpha}=\pi\left(\sqrt{1-\alpha^2}-1\right),\ |\alpha|\le 1$$

(Для $\alpha=\pm 1$ равенство следует из непрерывности функции I на $[-1,1]$).

Пример 8 (3801)

$$I(\alpha,\ \beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\alpha x\operatorname{arctg}\beta x}{x^2}dx,\ \ \alpha,\beta>0$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}\beta x}{x\left(1+a^2x^2\right)}dx$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial\alpha\partial\beta}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(1+\alpha^2x^2\right)\left(1+\beta^2x^2\right)}dx=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2x^2}-\frac{\beta^2}{1+\beta^2x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{\pi}{2}\alpha-\frac{\pi}{2}\beta\right)=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{\pi}{2}\left(\ln(\alpha+\beta)+C(\alpha)\right)$$

$$\beta\to 0:\ 0=\frac{\pi}{2}\left(\ln(\alpha)+C(\alpha)\right),\ \ C(\alpha)=-\ln\alpha$$

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha}=\frac{\pi}{2}\left(\ln(\alpha+\beta)-\ln\alpha\right)$$

$$I=\frac{\pi}{2}\left((\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\alpha\ln\alpha+C(\beta)\right)$$

$$a\to 0:\ 0=\frac{\pi}{2}\left(\beta\ln\beta+C(\beta)\right),\ \ C(\beta)=-\beta\ln\beta$$

$$I=\frac{\pi}{2}\left((\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta)-\alpha\ln\alpha-\beta\ln\beta\right)$$

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2};\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2},\ \ \alpha>0$$

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2};\ \ \int_0^{+\infty}e^{-\alpha x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}},\ \alpha>0$$

Пример 9 (3813)

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-\cos\beta x}{x^2}dx$$

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\left(1-e^{-ax^2}\right)\Big|_0^{+\infty}+2\alpha\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx=0+2\sqrt{a}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\sqrt{\pi\alpha}\ ,$$

$$I_2=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos\beta x}{x^2}dx=-\frac{1}{x}\left(1-\cos\beta x\right)\Big|_0^{+\infty}+\beta\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\frac{\pi\beta}{2},$$

$$I=-I_1+I_2=\frac{\pi\beta}{2}-\sqrt{\pi\alpha}\ .$$

Пример 10 (3819)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx=-\frac{\sin^4 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+4\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3 x\cos x}{x}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x\sin 2x}{x}dx=$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\left(1-\cos 2x\right)\sin 2x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Домашнее задание. 3756,3758,3763,3790,3792,3793,3798,3799.