Собственные интегралы, зависящие от параметра

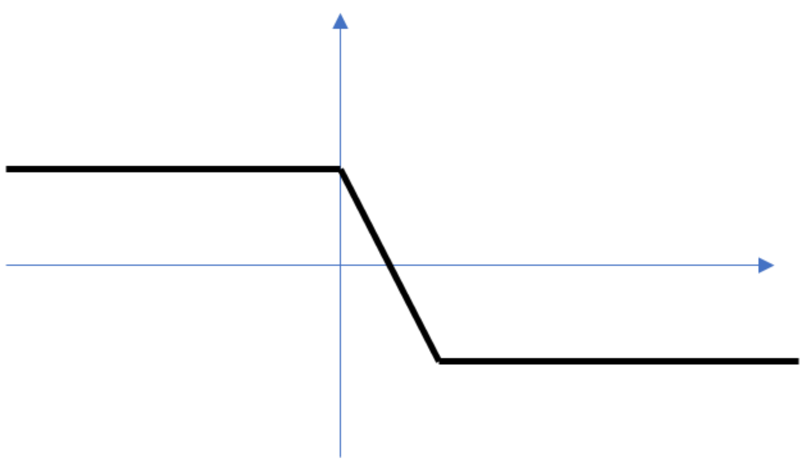
Пример 1 (№3711)

$$F(y)=\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)dx,\ \ \operatorname{sgn} u=\begin{cases}-1,\ u<0\\ 0,\ \ u=0,\\ 1,\ \ u>0\end{cases}$$

$$F(y)=\int_0^1 1dx=1,\text{ если } y\le 0,$$

$$F(y)=\int_0^1 (-1)\,dx=-1,\text{ если } y\ge 1,$$

$$F(y)=\int_0^y (-1)\,dx+\int_y^1 1dx=-y+1-y=1-2y,\text{ если } 0<y<1$$



F непрерывна на всей вещественной прямой.

Пример 2.(3713 б))

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx=\int_{-1}^{1}|x|\,dx=2\int_0^1 xdx=1$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}dx=2\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}\right)\right)\Bigg|_0^1=\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha^2\ln\frac{1+\sqrt{1+\alpha^2}}{|\alpha|}$$

Пример 3   3718 б)

$$F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

$$F'(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\cos\alpha x dx+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}=$$

$$=\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{\alpha}+\frac{\sin\alpha(b+\alpha)}{b+\alpha}-\frac{\sin\alpha(a+\alpha)}{a+\alpha}$$

Пример 4 (3733)

$$I(a)=\int_0^\pi \ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$$

$$I'(a)=\int_0^\pi\frac{2a-2\cos x}{1-2a\cos x+a^2}dx=\left[u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]=4\int_0^{+\infty}\frac{a-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+a^2-2a\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{du}{1+u^2}=$$

$$=4\int_0^{+\infty}\frac{(a-1)+(a+1)u^2}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2}\frac{du}{1+u^2}=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\left(\frac{a^2-1}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)du$$

Предположим сначала, что $-1<a<1$, тогда

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a^2-1}{(1-a)^2+(1+a)^2u^2}du=\left[u=\frac{1-a}{1+a}v\right]=-\int_0^{+\infty}\frac{dv}{v^2+1}=-\frac{\pi}{2}$, и $I'(a)=0$.

Поскольку $I(0)=0$, то $I(a)=0$ при $a\in(-1,1)$.

Если $|a|>1$, положим $b=1/a$, $|b|<1$.

$$I(a)=I(1/b)=\int_0^\pi\ln\left(1-\frac{2}{b}\cos x+\frac{1}{b^2}\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi\ln\left(\frac{b^2-2b\cos x+1}{b^2}\right)dx=I(b)-\pi\ln b^2=0+\pi\ln a^2=\pi\ln a^2$$

Наконец,

$$I(1)=\int_0^\pi\ln(2-2\cos x)dx=[x=\pi-y]=\int_0^\pi\ln(2+2\cos y)dy=I(-1);$$

$$2I(1)=I(1)+I(-1)=\int_0^\pi\left(\ln(2-2\cos x)+\ln(2+2\cos x)\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi\ln\left(4-4\cos^2 x\right)dx=\int_0^\pi\ln\left(4\sin^2 x\right)dx=\int_0^\pi\ln(2-2\cos 2x)dx=I(1)$$

$$2I(1)=I(1),\ I(1)=0$$

(Можно организовать вычисление и несколько иначе. Сохраним первый этап, $I(a)=0$ при $a\in(-1,1)$. Установим непрерывность функции I. При $a>1$ получим $I'(a)=\dfrac{2\pi}{a},\ I(a)=\pi\ln a^2$)

Пример 5 (3736) Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

вычислите интеграл

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2y^2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1+y^2\sin^2 t}\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{\cos^2 t+\left(y^2+1\right)\sin^2 t}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\left(y^2+1\right)\operatorname{tg}^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t}\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+\left(y^2+1\right)u^2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{y^2+1}}dy=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Пример 6 (3737 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислите интеграл

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(b>a>0)$$

Запишем равенство

$$\int_0^1 x^y dx=\frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1=\frac{1}{y+1}$$

и проинтегрируем его по отрезку $[a,\,b]$:

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{dy}{y+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}$$

Пример 7(3738 а)) Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx \quad (b > a > 0)$$

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)x^y dx = \left[z = \ln\frac{1}{x},\ \ x = e^{-z}\right] = \int_0^{+\infty} e^{-z(y+1)}\sin z dz =$$

$$= -\left.\frac{e^{-z(y+1)}\cos z + (y+1)e^{-z(y+1)}\sin z}{(y+1)^2+1}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{(y+1)^2+1}$$

Интегрируя это равенство, получаем

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \int_a^b \frac{dy}{(y+1)^2+1} = \left.\operatorname{arctg}(y+1)\right|_a^b = \operatorname{arctg}(b+1) - \operatorname{arctg}(a+1)$$