Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть f — функция на $\Delta \times Y$, Δ — промежуток, при каждом $y \in Y$ функция $f(\bullet, y)$ интегрируема по промежутку Δ (в собственном смысле).

Положим $$I : I(y) = \int_{\Delta} f(x, y)\,dx.$$

Функция I называется интегралом, зависящим от параметра.

Теорема 1. f непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$.

Тогда интеграл, зависящий от параметра, $I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ непрерывен на отрезке $[c,d]$.

Теорема 2.

Пусть f — функция на $[a, b] \times Y$, y_0 — предельная точка множества Y,

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \qquad f(x, y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} \varphi(x).$$

Тогда $$I(y) \underset{y \to y_0}{\to} \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Теорема 3.

f непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, $\quad I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$.

Тогда $$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy, \quad \text{т.е.} \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Теорема 4. Правило Лейбница

f, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$.

Тогда функция I непрерывно дифференцируема на отрезке $[c,d]$ и

$$\forall y \in [c,d]\ I'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx.$$

Пример 1 (№3711)

$$F(y)=\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)dx,\ \operatorname{sgn}u=\begin{cases}-1,\ u<0\\ 0,\ u=0,\\ 1,\ u>0\end{cases}$$ Ответ: $$F(y)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ y\le 0\\ 1-2y,\ \text{если}\ 0\le y\le 1\\ -1,\ \text{если}\ y\ge 1\end{cases}$$

Пример 2.(3713 б))

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx$$ Ответ: 1

Пример 3 3718 б) Найдите производную функции

$$F(\alpha)=\int_{a+\alpha}^{b+\alpha}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$$

Пример 4 (3733) Вычислите интеграл $I(a)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2a\cos x+a^2\right)dx$.

Ответ: $I(a)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ |a|\le 1\\ \pi\ln a^2\ \text{если}\ |a|>1\end{cases}$

Пример 5 (3736) Пользуясь формулой

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=\int_0^1\frac{dy}{1+x^2y^2},$$

вычислите интеграл

$$\int_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$ Ответ: $\frac{\pi}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$

Пример 6 (3737 Применяя интегрирование под знаком интеграла, вычислите интеграл

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad (b>a>0)$$ Ответ: $\ln\frac{b+1}{a+1}$

Пример 7(3738 а)) Вычислите интеграл

$$\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad (b>a>0)$$ Ответ: $\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}(a+1)$

Домашнее задание. №№3713 а), 3718 а),б),3732, 3738 б)