1.

$$\iint\limits_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy,$$

S − верхняя сторона поверхности $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ x,y,z\ge 0$

$$\iint\limits_S zdx\wedge dy=\iint\limits_{x,y\ge 0,\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1} 4\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)dxdy=6\iint\limits_{u,v\ge 0,u+v\le 1} 4\left(1-u-v\right)dudv=$$

$$=24\int_0^1 du\int_0^{1-u}\left(1-u-v\right)dv=24\int_0^1\frac{\left(1-u\right)^2}{2}du=24\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=4$$

Ответ: 12.

Или

$$\iint\limits_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy=\iint\limits_S\left(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu\right)d\sigma=$$

$$=\iint\limits_S\frac{6x+4y+3z}{\sqrt{36+16+9}}d\sigma=\frac{12}{\sqrt{61}}\iint\limits_S d\sigma=\frac{12}{\sqrt{61}}\iint\limits_{x,y\ge 0,\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1}\sqrt{1+4+\frac{16}{9}}dxdy=$$

$$=\frac{12}{\sqrt{61}}\frac{\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{x,y\ge 0,\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\le 1}dxdy=4\cdot 3=12$$

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1,\ 6x+4y+3z=12$$

2.

$$\iint\limits_S x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy,$$

S − внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Решение_1.

$$\iint\limits_S z^3dx\wedge dy=\iint\limits_{S,z\ge 0}z^3dx\wedge dy+\iint\limits_{S,z\le 0}z^3dx\wedge dy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(a^2-x^2-y^2\right)^{3/2}dxdy=$$

$$=4\pi\int_0^a\left(a^2-r^2\right)^{3/2}rdr=-4\pi\cdot\frac{1}{5}\left(a^2-r^2\right)^{5/2}\Big|_0^a=\frac{4}{5}\pi a^5$$

Решение_2.

$$\iint\limits_S x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy=\iint\limits_S\left(x^3\frac{x}{a}+y^3\frac{y}{a}+z^3\frac{z}{a}\right)d\sigma=$$

$$=\iint\limits_S\left(x^4+y^4+z^4\right)d\sigma=6\iint\limits_S z^4d\sigma=6\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(a^2-x^2-y^2\right)^2\frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$$

$$=6\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\left(a^2-x^2-y^2\right)^{3/2}dxdy=12\pi\int\limits_0^a\left(a^2-r^2\right)^{3/2}rdr=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

Решение_3.

$$\iint\limits_S x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy=3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le a^2}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz=$$

$$=3\cdot 2\pi\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\psi d\psi\int\limits_0^a\rho^5d\rho=3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{1}{5}a^5=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

Ответ: $\frac{12}{5}\pi a^5$.

3.

$\iint\limits_S z^2dx\wedge dy$, S – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2$, $0\le z\le 1$.

Решение_1.

$$\iint\limits_S z^2dx\wedge dy=\iint\limits_{S,z=1}z^2dx\wedge dy+\iint\limits_{S,x^2+y^2=1}z^2dx\wedge dy;$$

$$\iint\limits_{S,z=1}z^2dx\wedge dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=\pi,\quad\iint\limits_{S,x^2+y^2=1}z^2dx\wedge dy=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2+y^2\right)dxdy=-\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Решение_2.

$$\iint\limits_S z^2dx\wedge dy=2\iiint\limits_{\substack{0\le z\le 1\\ x^2+y^2\le z^2}}zdxdydz=2\int\limits_0^1 zdz\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}dxdy=$$

$$=2\pi\int\limits_0^1 z^3dz=\frac{\pi}{2}$$

4.

$\iint\limits_S\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz$, S – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2$, $0\le z\le 1$.

$$\iint\limits_S \left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz = \iint\limits_{S,z=1}\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz + \iint\limits_{S,x^2+y^2=z^2}\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz =$$

$$= \iint\limits_{S,x^2+y^2=z^2}\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz = \iint\limits_{S,x^2+y^2=z^2,x\geq 0}\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz + \iint\limits_{S,x^2+y^2=z^2,x\leq 0}\left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz =$$

$$= \iint\limits_{\substack{0\leq z\leq 1\\ -z\leq y\leq z}}\left(\left(z^2-y^2\right)^{3/2}+z^3\right)dydz - \iint\limits_{\substack{0\leq z\leq 1\\ -z\leq y\leq z}}\left(-\left(z^2-y^2\right)^{3/2}+z^3\right)dydz =$$

$$= 2\iint\limits_{\substack{0\leq z\leq 1\\ -z\leq y\leq z}}\left(z^2-y^2\right)^{3/2}dydz = 4\iint\limits_{\substack{0\leq z\leq 1\\ 0\leq y\leq z}}\left(z^2-y^2\right)^{3/2}dydz =$$

$$= 4\int_0^1 dz\int_0^z\left(z^2-y^2\right)^{3/2}dy = 4\int_0^1 z^4dz\int_0^{\pi/2}\cos^4 tdt = \frac{4}{5}\cdot\frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3}{20}\pi.$$

Ответ: $\frac{3}{20}\pi$.

Решение_2.

$$\iint\limits_S \left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz = 3\iiint\limits_{\substack{0\leq z\leq 1\\ x^2+y^2\leq z^2}} x^2dxdydz = 3\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+y^2\leq z^2} x^2dxdy = 3\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\int_0^z r^3dr =$$

$$3\pi\int_0^1\frac{z^4}{4}dz = \frac{3}{20}\pi$$

5.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy,$$

S − внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\leq z\leq b.$

Решение_1.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy = \iint\limits_{S,z=0}\left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy + \iint\limits_{S,z=b}\left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy + \iint\limits_{S,x^2+y^2=a^2}\left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy =$$

$$= -\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} x^4dxdy + \iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2}\left(x^4+b^4\right)dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} b^4dxdy = \pi a^2b^4$$

Решение_2.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy = 4\iiint\limits_{\substack{0\leq z\leq b\\ x^2+y^2\leq z^2}} z^3dxdydz = 4\int_0^b z^3dz\iint\limits_{x^2+y^2\leq a^2} dxdy = \pi a^2b^4$$

Ответ: πa^2b^4

6.

$$\iint\limits_S \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx,$$

S − внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\leq z\leq b$

Решение_1.

$$\iint_S \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx = \iint_{S,x^2+y^2=a^2} \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx =$$

$$= \iint_{\substack{0\le z\le b\\ -a\le x\le a}} \left(x^4+\left(a^2-x^2\right)^2+\left(a^2-x^2\right)^{5/2}\right)dzdx - \iint_{\substack{0\le z\le b\\ -a\le x\le a}} \left(x^4+\left(a^2-x^2\right)^2-\left(a^2-x^2\right)^{5/2}\right)dzdx$$

$$=2\iint_{\substack{0\le z\le b\\ -a\le x\le a}} \left(a^2-x^2\right)^{5/2} dzdx = 4\iint_{\substack{0\le z\le b\\ 0\le x\le a}} \left(a^2-x^2\right)^{5/2} dzdx = 4\int_0^b dz\int_0^a \left(a^2-x^2\right)^{5/2} dx =$$

$$=4a^6b\int_0^{\pi/2}\cos^6 tdt = 4a^6b\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi a^6 b.$$

Решение_2.

$$\iint_S \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx = \iiint_{\substack{0\le z\le b\\ x^2+y^2\le a^2}} \left(4y^3+5y^4\right)dxdydz =$$

$$=5\int_0^b dz\iint_{x^2+y^2\le a^2} y^4dxdy = 5b\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi d\varphi\int_0^a r^5dr = 5b\cdot 4\cdot\frac{3\pi}{16}\cdot\frac{a^6}{6} = \frac{5}{8}\pi a^6 b$$

7.

$\iint_S \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le 4z^2,\ 0\le z\le 1$.

Решение_1.

$$\iint_S \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz = \iint_{S,x^2+y^2=4z^2} \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz =$$

$$= \iint_{\substack{0\le z\le 1\\ x^2+y^2=4z^2}} \left(\left(4z^2-y^2\right)^{5/2}+z^5\right)dydz - \iint_{\substack{0\le z\le 1\\ x^2+y^2=4z^2}} \left(\left(4z^2-y^2\right)^{5/2}+z^5\right)dydz =$$

$$2\iint_{\substack{0\le z\le 1\\ -2z\le y\le 2z}} \left(4z^2-y^2\right)^{5/2} dydz = 4\int_0^1 dz\int_0^{2z}\left(4z^2-y^2\right)^{5/2} dy = 4\int_0^1 64z^6dz\int_0^{2\pi}\cos^6 tdt =$$

$$=4\cdot 64\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{40}{7}\pi.$$

Решение_2.

$$\iint_S \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz = 5\iiint_{\substack{0\le z\le 1\\ x^2+y^2\le 4z^2}} x^4dxdydz = 5\int_0^1 dz\iint_{x^2+y^2\le 4z^2} x^4dxdy =$$

$$=5\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}\cos^4\varphi d\varphi\int_0^{2z} r^5dr = 5\int_0^1\frac{64}{6}z^6dz\frac{3}{4}\pi = \frac{40}{7}\pi$$

8. $\iint_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy,\ S$ – внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 3$.

Решение_1.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy = \iint\limits_{S,z=3} \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy - \iint\limits_{S,x^2+y^2=z^2} \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \left(x^4+81\right)dxdy - \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \left(x^4+\left(x^2+y^2\right)^2\right)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \left(81-\left(x^2+y^2\right)^2\right)dxdy = 729\pi - \iint\limits_{x^2+y^2\le 9} \left(x^2+y^2\right)^2 dxdy =$$

$$= 729\pi - 2\pi\int_0^3 r^5 dr = 729\pi - 2\pi\cdot\frac{729}{6} = 486\pi.$$

Решение_2.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy = 4\iiint\limits_{\substack{0\le z\le 3\\ x^2+y^2\le z^2}} z^3 dxdydz = 4\int_0^3 z^3 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le z^2} dxdy = 4\pi\int_0^3 z^5 dz = 4\pi\,\frac{729}{6} = 486\pi\ .$$