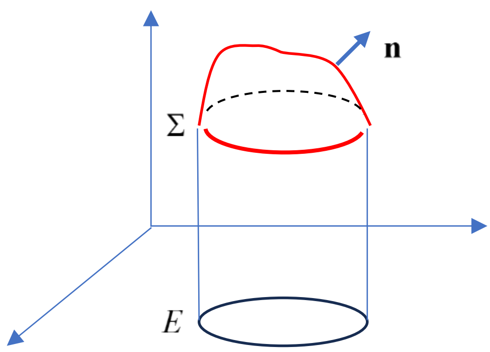
ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Пусть Σ — поверхность, заданная явным уравнением

$$\Sigma : z = f(x, y),\ (x, y) \in E,$$

на Σ выбрана верхняя сторона.



$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = \iint\limits_{E} P\big(x, y, f(x, y)\big)\, dxdy$$

Если $\Sigma \perp Oxy$, то $\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = 0$.

$$\Sigma : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \qquad \iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)\, dx \wedge dy = \iint\limits_{E} P\big(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)\big) \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\, dudv$$

$$\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \chi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} & \dfrac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} d\sigma$$

Связь интегралов первого и второго рода

$$\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint\limits_{\Sigma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu)\, d\sigma$$

Формула Остроградского-Гаусса

$$\oiint\limits_{\Sigma^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

1.

$$\iint\limits_S xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy,$$

S − верхняя сторона поверхности $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1,\ x,y,z\geq 0$

Ответ: 12.

2.

$$\iint\limits_S x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy,$$

S − внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Ответ: $\dfrac{12}{5}\pi a^5$.

3.

$\iint\limits_S z^2dx\wedge dy$, S − внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq 1$. Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

4.

$\iint\limits_S \left(x^3+z^3\right)dy\wedge dz$, S − внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq 1$.

Ответ: $\dfrac{3\pi}{20}$

5.

$$\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy,$$

S − внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\leq z\leq b.$

Ответ: πa^2b^4.

6.

$$\iint\limits_S \left(x^4+y^4+y^5\right)dz\wedge dx,$$

S − внешняя сторона поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2.\ 0\leq z\leq b.$

Ответ: $\dfrac{5}{8}\pi a^6b$.

7.

$\iint\limits_S \left(x^5+z^5\right)dy\wedge dz$, S − внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\leq 4z^2,\ 0\leq z\leq 1$.

Ответ: $\dfrac{40}{7}\pi$.

8. $\iint\limits_S \left(x^4+z^4\right)dx\wedge dy$, S − внешняя сторона поверхности конуса $x^2+y^2\leq z^2,\ 0\leq z\leq 3$.

Ответ: 486π.

ДЗ 4362, 4363, 4364, 4365, 4366; 4387, 4388, 4389, 4390