РЯДЫ ФУРЬЕ

Определение

Пусть $f\ -\ 2\pi$ - периодическая функция на вещественной прямой, абсолютно интегрируемая на периоде, т.е. существует конечный $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)\right|dx$, хотя бы в несобственном смысле.

Числа

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n=0,\,1,\ldots;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx\ \ n=1,\,2,\ldots$$

называются коэффициентами Фурье функции f.

Тригонометрический ряд

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

называется рядом Фурье функции f.

Теорема 1. Если функция f имеет производную в точке x, то ее ряд Фурье сходится в точке x и имеет сумму $S(x)=f(x)$.

Теорема 2. Если функция f имеет односторонние производные в точке x, то ее ряд Фурье сходится в точке x и имеет сумму $S(x)=f(x)$.

Теорема 3. Если функция f имеет односторонние производные в обобщенном смысле

$$f'_{\pm}(x_0)=\lim_{x\to x_0\pm0}\frac{f(x)-f(x_0\pm0)}{x-x_0}$$

в точке x, то ее ряд Фурье сходится в точке x и имеет сумму

$$S(x)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Примеры

1) $f(x)=\operatorname{sgn}x,\ -\pi<x<\pi$. Функция нечетна, поэтому $a_n=0$. Для b_n имеем

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0,\ n\ \text{четно}\\ \dfrac{4}{\pi n},\ n\ \text{нечетно}\end{cases}$$

Ряд Фурье имеет вид

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Для $x \in (-\pi, \pi)$ справедливо равенство

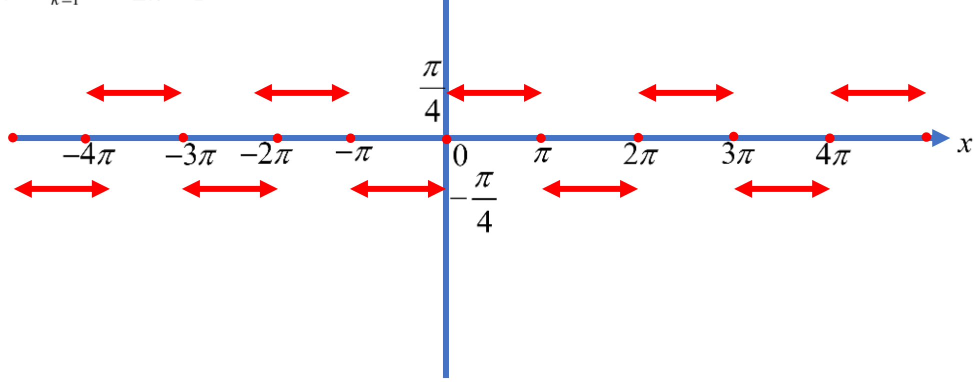
$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \operatorname{sgn} x.$$

При $x = \dfrac{\pi}{2}$ получается ряд Лейбница

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

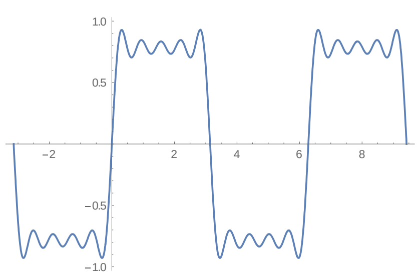
$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad 0 < x < \pi$$

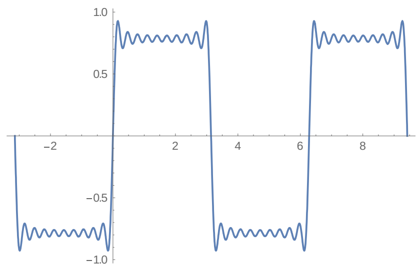


Построим еще графики частичных сумм ряда Фурье.

$$S_5(x) = \sum_{k=1}^{5}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 5x}{7} + \frac{\sin 9x}{9}:$$



$$S_{10}(x)=\sum_{k=1}^{10}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}:$$



2) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ 0<x<2\pi$.

Вычислим коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=-\frac{1}{4\pi}(\pi-x)^2\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos nxdx=\frac{1}{2\pi n}\left((\pi-x)\sin nx\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nxdx=\frac{1}{2\pi n}\left(-(\pi-x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{n}.$$

Ряд Фурье имеет вид

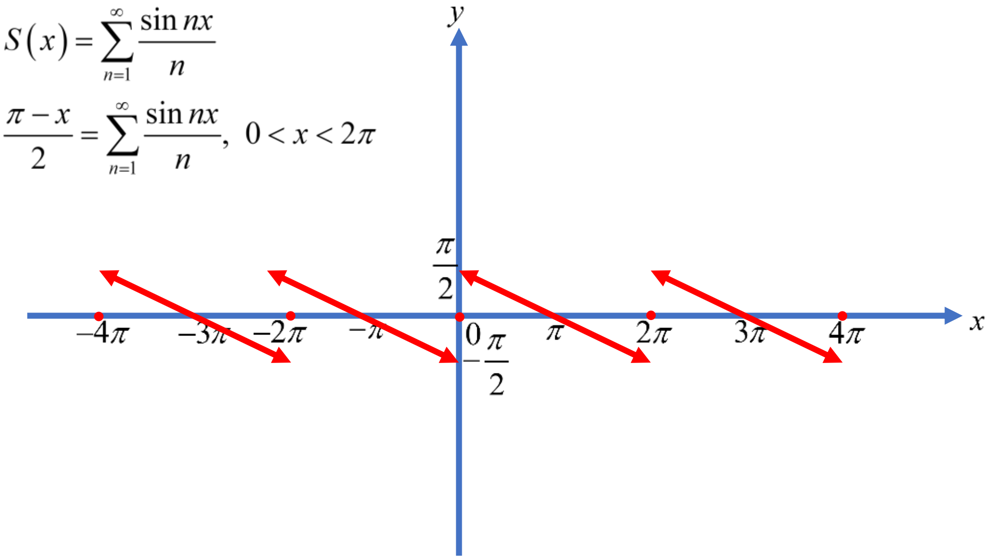
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Для $x\in(0,2\pi)$ справедливо равенство

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\ 0<x<2\pi$$



3) 2961 Разложите функцию $f(x)=x^2$:

а) в интервале $(0,\ \pi)$ по косинусам; б) в интервале $(0,\ \pi)$ по синусам; в) в интервале $(0,\ 2\pi)$.

а)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi n}\left(x^2\sin nx\Big|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}x\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{4}{\pi n^2}\pi(-1)^n=\frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Ряд Фурье имеет вид

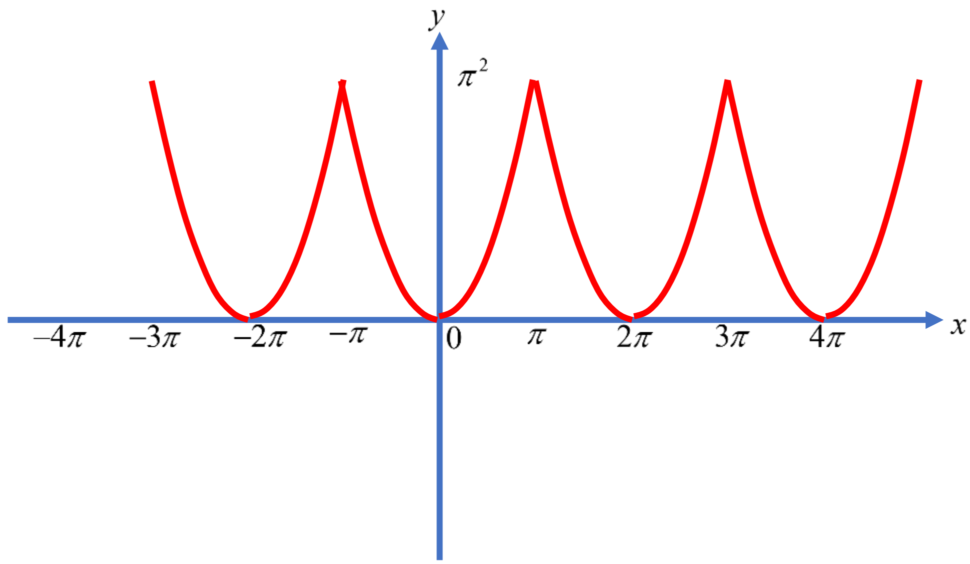
$$\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx.$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx,\ x\in[0,\pi].$$

Отсюда можно получить интересные равенства.

$$x=0:\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12};$$

$$x=\pi:\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(-1)^n=\pi^2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$



б)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi n}\left(-x^2 \cos nx\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi} x \cos nx dx\right) =$$

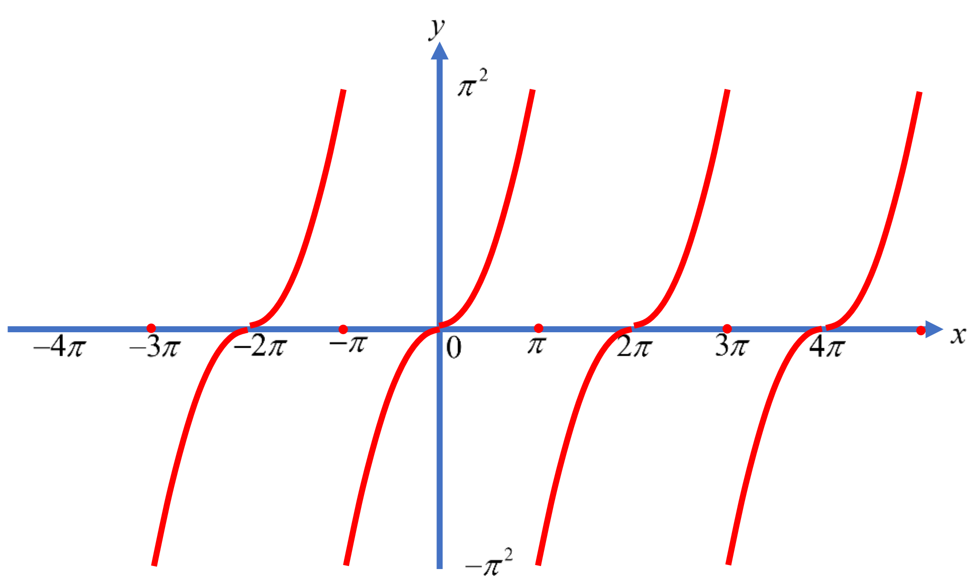
$$= \frac{2}{\pi n}\left(-\pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n}\left(x \sin nx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin nx dx\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-\pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\right).$$

Ряд Фурье имеет вид

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3},$$

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = x^2,\ x \in (0, \pi)$$



в)

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi n}\left(x^2 \sin nx\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x \sin nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left(x \cos nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right) = \frac{4}{n^2},$$

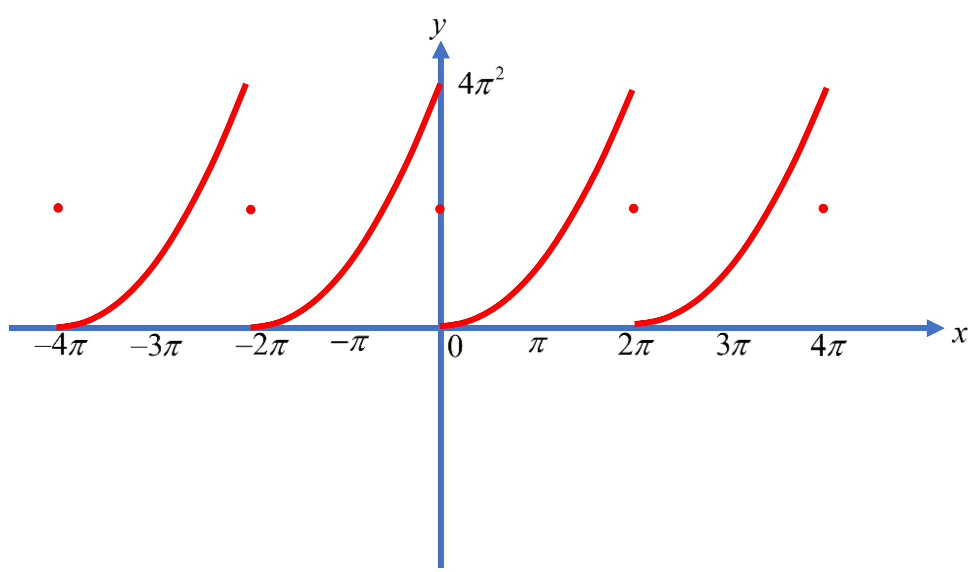
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi n}\left(-x^2 \cos nx\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi} x \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(-4\pi^2 + \frac{2}{n}\left(x \sin nx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin nx dx \right)\right) = -\frac{4\pi}{n}$$

Ряд Фурье имеет вид

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} = x^2,\ x \in (0, 2\pi)$$



4) $f(x) = \cos ax,\ \ x \in [-\pi, \pi]\quad (a \notin \mathbb{Z})$

Функция четная, поэтому разлагается в ряд Фурье по косинусам.

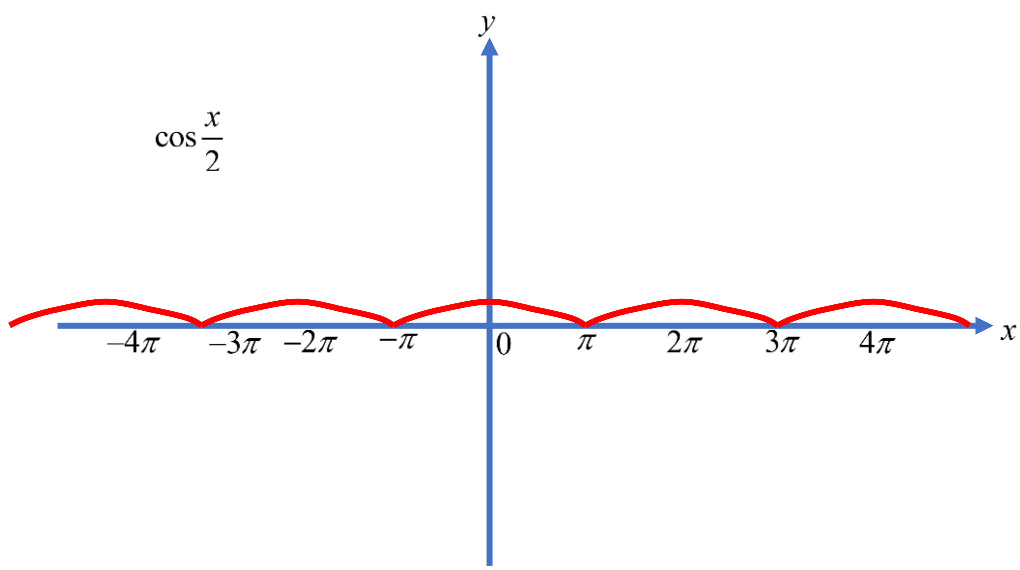
$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{2}{\pi a}\sin a\pi,$$

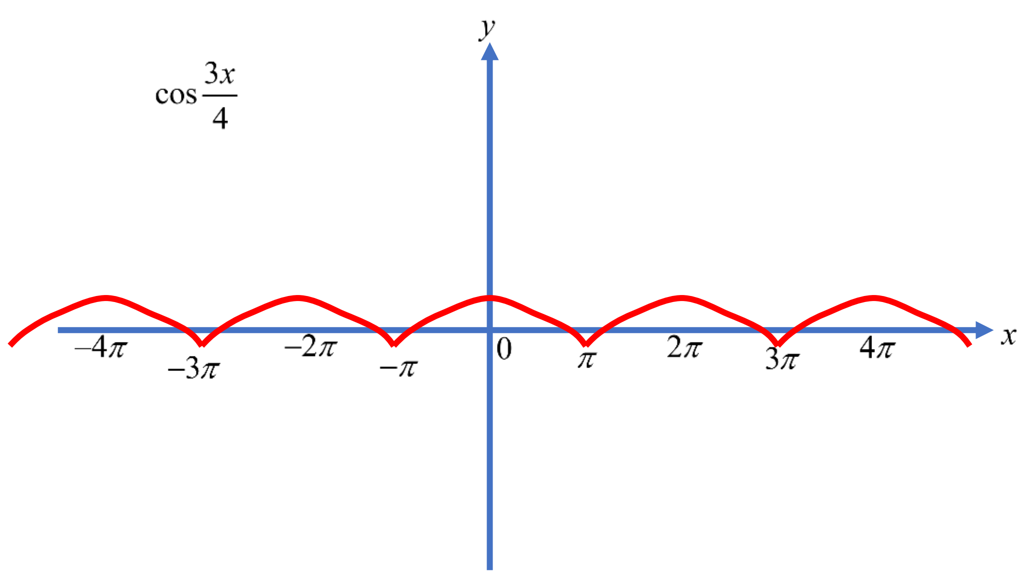
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(a+n)x + \cos(a-n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{\sin(a-n)\pi}{a-n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\sin a\pi\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right).$$

Ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \cos ax \sim \frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{a-n} + \frac{1}{a+n}\right)\cos nx\right).$$





2966. Разложите в ряд Фурье функцию

$$f\left(x\right)=\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^{2}},\ \left|q\right|<1.$$

А) Заметим, что функция f является мнимой частью комплекснозначной функции

$$\frac{1}{1-qe^{ix}}=\frac{1-qe^{-ix}}{\left(1-qe^{ix}\right)\left(1-qe^{-ix}\right)}=\frac{1-q\cos x+iq\sin x}{1-2q\cos x+q^{2}}.$$

Комплекснозначная функция разлагается в геометрический ряд:

$$\frac{1}{1-qe^{ix}}=\sum_{n=0}^{\infty}q^{n}e^{inx}.$$

Выделяя мнимые части в последнем равенстве, получаем искомое разложение

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx.$$

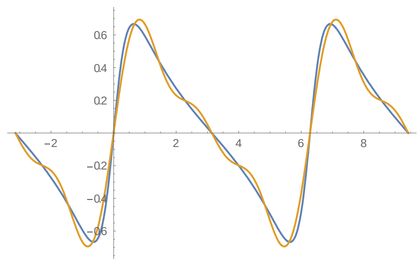
Б) Если только что полученный результат считать известным, то его доказательство легко провести "чисто вещественными" средствами.
Действительно,

$$\begin{aligned}
&\left(1-2q\cos x+q^{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx=\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx-2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+1}\sin nx\cos x+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+2}\sin nx=\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx-\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+1}\left(\sin\left(n+1\right)x+\sin\left(n-1\right)x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+2}\sin nx\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx-\sum_{n=2}^{\infty}q^{n}\sin nx-\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+2}\sin nx+\sum_{n=1}^{\infty}q^{n+2}\sin nx=q\sin x.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}q^{n}\sin nx.$$

Рассмотрим частный случай с $q=\frac{1}{2}$. Построим графики функции $f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\sin x}{\frac{5}{4}-\cos x}=\dfrac{2\sin x}{5-4\cos x}$ и частичной суммы $S_3(x)=\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 3x}{8}$ ряда Фурье:



2970. Разложите в ряд Фурье неограниченную периодическую функцию $f(x)=\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|$.

РЕШЕНИЕ. f — четная 2π -периодическая функция.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{\pi-x}{2}\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)dx,$$

$$2a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)+\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{2}\sin x\right)dx=2\ln\frac{1}{2}+a_0,$$

$$a_0=2\ln\frac{1}{2}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\cos nx dx=\frac{2}{n\pi}\left(\ln\left(\sin\frac{x}{2}\right)\sin nx\Big|_0^\pi-\int_0^\pi \sin nx\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx\right).$$

$$I_n=\int_0^\pi \sin nx\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx,$$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^\pi\left(\sin(n+1)-\sin nx\right)\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx=$$

$$=\int_0^\pi \sin\frac{x}{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^\pi\left(\cos(n+1)x+\cos nx\right)dx=0,$$

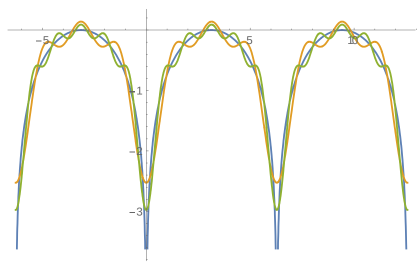
$$I_1=\int_0^{\pi}\sin x\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx=\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx=\frac{\pi}{2},$$

$$I_n=\frac{\pi}{2},\ \ n=1,2,\dots,$$

$$a_n=-\frac{1}{n},$$

$$\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right|\sim-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}.$$

Графики функции f и частичных сумм $S_3,\ S_5$ ряда Фурье:



ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

3882. Представьте интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn} x, |x|<1,\\ 0,\ \ |x|>1.\end{cases}$$

Решение.

$$b(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\sin ytdt=\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos y}{y}$$

ОТВЕТ: $f(x)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\cos y}{y}\sin xydy$.

ПРОВЕРКА:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos y}{y}\sin xy dy=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin xy-\sin(x+1)y-\sin(x-1)y}{y}dy=\begin{cases}0, & x>1,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 1, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ -1, & -1<x<0,\\ -\frac{1}{2}, & x=-1,\\ 0, & x<-1\end{cases}$$

3885 Представьте интегралом Фурье функцию

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Решение.

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos yt}{t^2+1}dt=e^{-y}$$ — интеграл Лапласа.

ОТВЕТ: $\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-y}\cos xy dy$.

3897 Найдите преобразование Фурье функции

$$f(x)=xe^{-|x|}.$$

Решение.

$$\hat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-|t|}e^{-ity}dt=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-t}\sin ty dt=$$

$$=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(t\left.\frac{-e^{-t}\sin ty-ye^{-t}\cos ty}{y^2+1}\right|_0^{+\infty}+\frac{1}{(y^2+1)}\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}\sin ty+ye^{-t}\cos ty\right)dt\right)=$$

$$=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(y^2+1)^2}\left.\left(-e^{-t}\sin ty-ye^{-t}\cos ty+y^2e^{-t}\sin ty-ye^{-t}\cos ty\right)\right|_0^{+\infty}=$$

$$=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2y}{(y^2+1)^2}.$$

ОТВЕТ: $\hat{f}(y)=-i\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{y}{(y^2+1)^2}$.

ПРОВЕРКА:

$$-i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2y}{\left(y^2+1\right)^2}e^{ixy}dy=\frac{4}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{y}{\left(y^2+1\right)^2}\sin xydy=$$

$$=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{y^2+1}\sin xy\bigg|_{y=0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\frac{x\cos xy}{y^2+1}dy\right)=\frac{2}{\pi}x\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos xy}{y^2+1}dy=xe^{-|x|}$$

Домашнее задание

3884, 3896