

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ для студентов 2 курса ФизМеха (гр. 5030102/20001, 5030102/20002, 5030102/20003, 5030103/20001, 5030103/20002, 5030103/20003, 5030103/20004)

4 семестр 2023/24 уч.г., лектор – доц. Моисеев А.А.

Кратные интегралы

1. Площадь прямоугольника, свойства площади. Разбиения и выборки. Определение двойного интеграла по прямоугольнику.
2. Суммы Дарбу для двойного интеграла по прямоугольнику. Их свойства. Лемма Дарбу (без доказательства).
3. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу (для двойного интеграла). Теорема об интегрируемости непрерывной функции на прямоугольнике.
4. Множества меры нуль в смысле Лебега. Критерий Лебега существования двойного интеграла (без доказательства).
5. Определение двойного интеграла по множеству. Измеримость по Жордану. Мера Жордана.
6. Линейность и аддитивность двойного интеграла.
7. Монотонность двойного интеграла. Оценки. Теорема о среднем.
8. Сведение двойного интеграла к повторному.
9. Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Доказательство для случая "простейшего" диффеоморфизма.
10. Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Представление диффеоморфизма композицией "простейших". Завершение доказательства теоремы.
11. Линейная замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.
Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
12. Определение тройного интеграла. Условия интегрируемости (без доказательства).
13. Основные свойства тройного интеграла.
14. Сведение тройного интеграла к повторному (без доказательства). Примеры.
15. Замена переменных в тройном интеграле (без доказательства). Переход к цилиндрическим и сферическим координатам.

Криволинейные интегралы

16. Криволинейный интеграл I рода: определение, формулы для вычисления, основные свойства.
17. Линейные формы на n -мерном пространстве, линейные дифференциальные формы, определение криволинейного интеграла II рода.
18. Криволинейный интеграл II рода: интегрирование по эквивалентным и встречным путям, линейность и аддитивность, связь с интегралом I рода.
19. Формула Грина.
20. Независимость криволинейного интеграла II рода на плоскости от пути интегрирования и обращение в нуль интеграла по замкнутому пути. Понятие точной формы. Формула Ньютона-Лейбница.
21. Теорема о существовании первообразной для линейной дифференциальной формы.
22. Понятие замкнутой линейной дифференциальной формы. Теорема об интегралах по гомотопным путям.
23. Односвязные области. Точность замкнутой формы в односвязной области. Аналитический признак замкнутости линейной дифференциальной формы.

Поверхностные интегралы

24. Понятие гладкой поверхности. Параметрические уравнения. Явное уравнение. Край поверхности.
25. Замена переменных в уравнениях поверхности. Криволинейные координаты на поверхности.
26. Касательная плоскость и нормаль гладкой поверхности.
27. Ориентация пространства. Ориентация гладкой поверхности. Ориентация края поверхности. Односторонние и двусторонние поверхности.
28. Площадь гладкой поверхности. Определение. Формулы для вычисления. Независимость от параметризации и ориентации.
29. Поверхностный интеграл I рода. Определение. Основные свойства. Независимость от параметризации и ориентации.
30. Кососимметрические формы второго порядка в \mathbb{R}^n . Внешнее умножение линейных форм. Базис и размерность пространства кососимметрических форм второго порядка в \mathbb{R}^n . Дифференциальные формы второго порядка.
31. Перенос дифференциальных форм второго порядка. Основные свойства операции переноса.
32. Определение поверхностного интеграла II рода (интеграла от 2-формы). Независимость от параметризации. Связь с ориентацией. Формулы для вычисления поверхностного интеграла II рода.
33. Связь поверхностных интегралов I и II рода. Дифференциальная форма площади поверхности.
34. Внешний дифференциал дифференциальной формы. Основные свойства внешнего дифференцирования. Дифференцирование форм в \mathbb{R}^3 .
35. Перестановочность операций переноса и внешнего дифференцирования дифференциальных форм. Формула Стокса.
36. Формула Остроградского-Гаусса. Дифференциальные формы третьего порядка.
37. Числовые и векторные поля. Связь с дифференциальными формами. Связь внешнего умножения форм с операциями теории поля.
38. Дифференциальные операции теории поля, их связь с внешним дифференцированием дифференциальных форм. Дифференциальные операции второго порядка.
39. Дифференциальные операции в криволинейных координатах.
40. Векторная запись интегралов. Формулы Стокса и Остроградского в векторном анализе. Интегральные определения ротора и дивергенции.
41. Потенциальное векторное поле.
42. Соленоидальное векторное поле.

Интегралы, зависящие от параметра

43. Теорема о перестановке предельных переходов.
44. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теоремы о предельном переходе (без доказательства интегрируемости) и непрерывности.
45. Собственный интеграл, зависящий от параметра. Теоремы об интегрировании и дифференцировании.
46. Равномерная сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра: определение, критерий Коши. Примеры.
47. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра. Признаки Абеля и Дирихле (без доказательства).
48. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Теоремы о предельном переходе и непрерывности. Теорема Дини (без доказательства).
49. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о собственном интегрировании.
50. Несобственный интеграл, зависящий от параметра. Теорема о дифференцировании.
51. Теорема о перестановке двух несобственных интегрирований положительной функции.
52. Теорема о перестановке двух несобственных интегрирований (без доказательства).
53. Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

54. Вычисление интегралов Френеля $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$, $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$.

55. Формула Фруллани.

56. Интегралы Лапласа $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$, $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \beta x}{\alpha^2 + x^2} dx$.

57. В-функция Эйлера. Определение. Симметрия. Рекуррентная формула. Другое аналитическое выражение.

58. Г-функция Эйлера. Определение. Рекуррентная формула (без док-ва). Формула дополнения (без док-ва).

59. Интегральное представление Г-функции.

60. Г-функция Эйлера. Непрерывность и дифференцируемость. Монотонность и выпуклость.

61. Связь Г и В-функций.

Ряды Фурье и интеграл Фурье

62. Периодические функции. Тригонометрическая система. Ортогональность тригонометрической системы. Тригонометрический ряд. Единственность разложения периодической функции в тригонометрический ряд.

63. Понятие тригонометрического ряда Фурье. Ядро Дирихле, его свойства. Представление частичной суммы тригонометрического ряда Фурье интегралом Дирихле.

64. Лемма Римана.

65. Сходимость ряда Фурье дифференцируемой функции и функции, имеющей односторонние производные.

66. Теорема о представлении дифференцируемой функции интегралом Фурье (без доказательства).

67. Преобразование Фурье.