Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛДУ) называется дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x), \tag{1}$$

где $p(x),\ q(x)$ — непрерывные функции на интервале $(a,\ b)$

Уравнение

$$y' + p(x)\,y = 0 \tag{2}$$

называется линейным однородным (ЛОДУ).

Построение общего решения. Начнем с ЛОДУ (2). Это уравнение является уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{y'}{y} = -p(x),\ \left(\ln|y|\right)' = -p(x),\ \ln|y| = -P(x) + \tilde{C}\,,\ P \text{ — первообразная для } p\,;$$

$$y = Ce^{-P(x)} \text{ —} \tag{3}$$

общее решение ЛОДУ (2).

Для построения общего решения уравнения (1) можно применить метод вариации произвольной постоянной: решение будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-P(x)}. \tag{4}$$

Подставим (4) в (1):

$$C'e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)}\left(-p(x)\right) + Ce^{-P(x)}p(x) = q(x);$$

Получим д.у. для неизвестной функции C :

$$C' = q(x)e^{P(x)}.$$

Интегрирование дает

$$C(x) = R(x) + C\,,\ R(x) \text{ — первообразная для } q(x)e^{P(x)}.$$

Наконец, формула

$$y = R(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)} \tag{5}$$

дает общее решение ЛДУ (1).

В формуле (5) первое слагаемое — одно из решений (частное решение) ЛДУ (1), второе слагаемое — общее решение соответствующего ЛОДУ (2).

3^0. **Метод интегрирующего множителя**. Умножим уравнение (1) на интегрирующий множитель $e^{P(x)}$:

$$y'e^{P(x)} + p(x)ye^{P(x)} = q(x)e^{P(x)},$$

$$\left(ye^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)}, \qquad ,$$

$$ye^{P(x)} = R(x) + C;$$

$$y = R(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)} \tag{5}$$

Уравнение Бернулли.

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0;\ 1 \tag{7}$$

Уравнение сводится к линейному.

$$y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x),$$

$$z = y^{1-\alpha},\ z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x).$$

Получено линейное уравнение для неизвестной функции z.

137. $(2x+1)y' = 4x + 2y,\ x > -\dfrac{1}{2}$.

I). Решим сначала линейное однородное уравнение

$$(2x+1)y' = 2y,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{2x+1}, \ln|y| = \ln|2x+1| + \ln C$$

$$y = C\cdot(2x+1)$$

Решение линейного однородного уравнения найдем методом вариации произвольной постоянной:

$$y = C(x)(2x+1),$$
$$\left(C'\cdot(2x+1)+2C\right)\cdot(2x+1) = 4x+2C\cdot(2x+1),$$
$$C'\cdot(2x+1)^2 = 4x,$$
$$C' = \frac{4x}{(2x+1)^2} = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2},\ C(x) = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C,$$
$$y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1 + C\cdot(2x+1).$$

II). $(2x+1)y' = 4x+2y$, $(2x+1)y' - 2y = 4x,\ y' - \frac{2y}{2x+1} = \frac{4x}{2x+1}$

Умножим уравнение на интегрирующий множитель $e^{-\ln(2x+1)} = \frac{1}{2x+1}$.

$$\frac{y'}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}y = \frac{4x}{(2x+1)^2},$$

$$\left(\frac{y}{2x+1}\right)' = \frac{4x}{(2x+1)^2},$$
$$\left(\frac{y}{2x+1}\right)' = \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2},$$
$$\frac{y}{2x+1} = \ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C,$$
$$y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1 + C\cdot(2x+1).$$

Ответ: $y = (2x+1)\ln|2x+1| + 1 + C\cdot(2x+1)$.

144. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

Умножим уравнение на e^x:

$$xy'e^x + (x+1)ye^x = 3x^2,$$
$$\left(xye^x\right)' = 3x^2,$$
$$xye^x = x^3 + C,$$
$$y = x^2e^{-x} + C\frac{e^{-x}}{x}.$$

Ответ: $y = x^2e^{-x} + C\frac{e^{-x}}{x}$

146.

$$\left(2e^{y}-x\right)y'=1,$$
$$\frac{dx}{dy}=2e^{y}-x,\ \frac{dx}{dy}+x=2e^{y}.$$

Получилось линейное уравнение для неизвестной функции x.

Умножим уравнение на интегрирующий множитель e^{y}:

$$\frac{dx}{dy}e^{y}+xe^{y}=2e^{2y}.$$

$$\frac{d}{dy}\left(xe^{y}\right)=2e^{2y},\ xe^{y}=e^{2y}+C,x=e^{y}+Ce^{-y}.$$

Ответ: $x=e^{y}+Ce^{-y}$

151. $y'+2y=y^{2}e^{x}$.

Перед нами уравнение Бернулли. Разделим уравнение на y^{2}:

$$\frac{y'}{y^{2}}+\frac{2}{y}=e^{x}.$$

Введем новую неизвестную функцию $z=\frac{1}{y},z'=-\frac{y'}{y^{2}}$.

Для функции z получаем уравнение

$$-z'+2z=e^{x},z'-2z=-e^{x}.$$

Умножим уравнение на e^{-2x}:

$$z'e^{-2x}+2ze^{-2x}=-e^{-x}.$$

$$\left(ze^{-2x}\right)'=-e^{-x},ze^{-2x}=e^{-x}+C,\ z=e^{x}+Ce^{2x}.$$

Ответ: $\frac{1}{y}=e^{x}+Ce^{2x},y=0$.

Уравнение

$$y'+p\left(x\right)y+q\left(x\right)y^{2}=r\left(x\right)$$

Называется уравнением Риккати. Если $y=\varphi\left(x\right)$ — одно из его решений, то замена $y=z+\varphi\left(x\right)$ приводит к уравнению Бернулли для неизвестной функции z.

169. $xy'-\left(2x+1\right)y+y^2=-x^2$ — уравнение Риккати.

Подберем решение:

$$\begin{aligned}&y=x,\\&xy'-\left(2x+1\right)y+y^2=x-\left(2x+1\right)x+x^2=-x^2.\end{aligned}$$

$y=x$ — решение уравнения.

Положим $y=x+z$:

$$\begin{aligned}&x\left(1+z'\right)-\left(2x+1\right)\left(x+z\right)+\left(x+z\right)^2=-x^2,\\&x+xz'-2x^2-x-2xz-z+x^2+2xz+z^2=-x^2,\\&xz'-z+z^2=0.\end{aligned}$$

Получено уравнение Бернулли для неизвестной функции z. Разделим это уравнение на z^2:

$$x\frac{z'}{z^2}-\frac{1}{z}+1=0\,.$$

Введем новую неизвестную функцию $u=\dfrac{1}{z},u'=-\dfrac{z'}{z^2}$:

$$\begin{aligned}&-xu'-u+1=0,\\&xu'+u-1=0,\\&\left(xu\right)'=1,\ xu=x+C,u=1+\frac{C}{x},\\&\frac{1}{z}=1+\frac{C}{x}=\frac{x+C}{x},\ z=\frac{x}{x+C};\ z=0\end{aligned}$$

Ответ: $y=x+\dfrac{x}{x+C},y=x$

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1^0. **Определение**

Дифференциальное уравнение

$$M\left(x,\ y\right)dx+N\left(x,\ y\right)dy=0,\ \left(x,\ y\right)\in G \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists F\quad dF=Mdx+Ndy\text{, т.е. }\frac{\partial F}{\partial x}=M,\ \frac{\partial F}{\partial y}=N\,.$$

Функция F называется первообразной для дифференциальной формы $Mdx+Ndy$.

2^0. **Общий интеграл.** Для уравнения (1) соотношение

$$F(x,y)=C \text{ —} \tag{2}$$

общий интеграл, решениями д.у. являются функции, удовлетворяющие уравнению (2).

Действительно, $y=\varphi(x)$ — решение (1) $\Leftrightarrow$ $M(x,\varphi(x))+N(x,\varphi(x))\varphi'(x)=0$ $\Leftrightarrow$

$\left(F(x,\varphi(x))\right)'=0 \Leftrightarrow F(x,\varphi(x))=const \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ удовлетворяет равенству (2).

3^0. **Признак уравнения в полных дифференциалах.** Пусть функции M, N непрерывно дифференцируемы.

Если (1) —д.у. в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}. \tag{3}$$

Определение. Область G называется односвязной, если для любой простой замкнутой кривой $\Gamma\subset G$ внутренность D является частью G.

Односвязность означает, что любой замкнутый путь в G можно стянуть в точку.

В односвязной области условие (3) оказывается достаточным для того, чтобы уравнение (1) было дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

4^0. **Интегрирующий множитель**

Функция μ называется интегрирующим множителем для д.у.

$$Mdx+Ndy=0,$$

если уравнение

$$\mu Mdx+\mu Ndy=0 \text{ —}$$

уравнение в полных дифференциалах.

Отметим частные случаи, где интегрирующий множитель находится в виде функции одной переменной.

I Если $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$, то $\mu=h(x)=e^{\Psi(x)}$, где Ψ — первообразная для ψ.

II Если $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$, то $\mu=h(y)=e^{\Psi(y)}$, где Ψ — первообразная для ψ.

ЗАДАЧИ

187. $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy=0$

Найдем первообразную $F\left(x,y\right)$ для левой части уравнения. Находим F из системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=2x-9x^2y^2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=4y^3-6x^3y \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$F=x^2-3x^3y^2+\varphi\left(y\right).$$

Продифференцируем это равенство по y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-6x^3y+\varphi'\left(y\right).$$

Сравнивая полученное выражение со вторым уравнением системы, получаем уравнение

$$\varphi'\left(y\right)=4y^3,$$

в котором уже нет переменной x. Мы можем взять $\varphi\left(y\right)=y^4$. Искомая первообразная имеет вид

$$F\left(x,y\right)=x^2-3x^3y^2+y^4.$$

Ответ: $x^2-3x^3y^2+y^4=C$

190. $\dfrac{3x^2+y^2}{y^2}dx-\dfrac{2x^3+5y}{y^3}dy=0$.

Ответ: $\dfrac{x^3}{y^2}+x+\dfrac{5}{y}=C,\ x^3+xy^2+5y=Cy^2$

194. $\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx+\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y-1}dy=0$

$\left(\dfrac{x}{\sin y}+2\right)dx-\dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{2\sin^2 y}dy=0$

Ответ: $\dfrac{x^2+1}{2\sin y}+2x=C$

196. $\left(x^2+y^2+y\right)dx-xdy=0$

$\left(1+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)dx-\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=0$

$dx+\dfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2}=0$

$x-\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=C$, $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=x-C$, $\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}\left(x-C\right)$.

Ответ: $y=x\operatorname{tg}\left(x-C\right)$

199. $y^2dx-\left(xy+x^3\right)dy=0$.

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{2y+y+3x^2}{-\left(xy+x^3\right)}=\dfrac{3\left(y+x^2\right)}{-x\left(y+x^2\right)}=-\dfrac{3}{x}$.

Интегрирующий множитель имеет вид

$$\mu\left(x\right)=\frac{1}{x^3}.$$

Умножение дифференциального уравнения на этот множитель дает уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{y^2}{x^3}dx-\left(\frac{y}{x^2}+1\right)dy=0.$$

Общий интеграл записывается в виде

$$\frac{y^2}{2x^2}+y=C.$$

При делении на x^3 мы потеряли решение $x=0$.

Ответ: $\dfrac{y^2}{2x^2}+y=C$, $x=0$.

203. $y\left(x+y\right)dx+\left(xy+1\right)dy=0$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{(x+2y)-y}{-y(x+y)}=\frac{x+y}{-y(x+y)}=-\frac{1}{y}$$

$$\mu=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}$$

$$y(x+y)dx+(xy+1)dy=0\,|\,\frac{1}{y}$$

$$(x+y)dx+\left(x+\frac{1}{y}\right)dy=0$$

$$x^2+2xy+2\ln|y|=C$$

Ответ: $x^2+2xy+2\ln|y|=C,\ y=0$.

205. $\left(x^2+2x+y\right)dx=\left(x-3x^2y\right)dy$.

$$\left(x^2+2x+y\right)dx-\left(x-3x^2y\right)dy=0$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{1+1-6xy}{-\left(x-3x^2y\right)}=\frac{2-6xy}{-\left(x-3x^2y\right)}=-\frac{2(1-3xy)}{x(1-3xy)}=-\frac{2}{x}.$$

В ответ следует добавить решение $x=0$.

Ответ: $x+2\ln|x|-\frac{y}{x}++\frac{3}{2}y^2=C$, $x=0$.

$$y(2x-1)dx-\left(x^2-y^2-x\right)dy=0.$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2x-1+2x-1}{-y(2x-1)}=\frac{2(2x-1)}{-y(2x-1)}=-\frac{2}{y}.$$

Получаем интегрирующий множитель $\frac{1}{y^2}$.

Умножение дифференциального уравнения на этот множитель дает уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{2x-1}{y}dx-\left(\frac{x^2}{y^2}-1-\frac{x}{y^2}\right)dy=0.$$

Общий интеграл записывается в виде

$$\frac{x^2 - x}{y} - y = C.$$

Ответ: $\frac{x^2 - x}{y} - y = C$, $y = 0$.