ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.Ф.Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$y' = f(x)g(y) \text{ — в терминах производной,}$$

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \text{ — в терминах дифференциалов.}$$

Последнее уравнение интегрируется путем разделения переменных. Деление на $N_1(y)M_2(x)$ приводит уравнение к виду

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0,$$

уравнению с разделенными переменными.

Если F — первообразная для P, а G — первообразная для Q, то решения д.у. (6) получаются из соотношения

$$F(x) + G(y) = C. \tag{7}$$

Можем сказать еще, что (7) — общий интеграл д.у.

При разделении переменных может произойти потеря решений. Если $N_1(y_0) = 0$, то постоянная функция $y = y_0$ — решение д.у.; равным образом, если $M_2(x_0) = 0$, то постоянная функция $x = x_0$ — решение д.у. Эти решения следует включит в ответ.

52. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$.

Функция $x = 0$ является решением уравнения. Найдем другие решения. Разделение переменных достигается делением на $x\sqrt{y^2+1}$:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Интегрируя, получаем общий интеграл уравнения в виде

$$\ln Cx = \sqrt{y^2+1}.$$

Ответ: $\ln Cx = \sqrt{y^2+1}, x=0$.

56. $xy' + y = y^2;\ y(1) = 0.5$.

Функции $y=0$ и $y=1$ — решения уравнения.

Перенесем y вправо и разделим переменные путем деления на $y^2 - y$:

$$xy' = y^2 - y,\ \frac{y'}{y^2-y} = \frac{1}{x},\ \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)y' = \frac{1}{x}.$$

Интегрирование дает нам общий интеграл

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + \ln C,\ \frac{y-1}{xy} = C,\ \frac{y-1}{y} = Cx.$$

Из последнего получаем общее решение $y = \dfrac{1}{1-Cx}$.

Решение задачи Коши с начальным условием $y(1) = 0.5$, получаем, полагая в формуле общего решения

$$x=1, y=0.5 : \frac{1}{2} = \frac{1}{1-C},\ C=-1,\ y = \frac{1}{x+1}, x \in (-1, +\infty).$$

Ответ: $y = \dfrac{1}{1-Cx}, y=0, y=1$; решение задачи Коши — $y = \dfrac{1}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$.

65. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

Введем новую неизвестную функцию $z = 4x+2y-1,\ z' = 4+2y',\ y' = \dfrac{1}{2}(z'-4)$. Получаем уравнение

$$\frac{1}{2}(z'-4) = \sqrt{z},\ z' = 2\sqrt{z} + 4,$$

не содержащее независимой переменной x. Делением на $2\left(\sqrt{z}+2\right)$ разделяем переменные:

$$\frac{z'}{2\left(\sqrt{z}+2\right)} = 1.$$

Интегрирование дает

$$\sqrt{z} - 2\ln\left(\sqrt{z}+2\right) = x + C.$$

Ответ: $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+C$.

74. Найдите кривые, у которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, вдвое меньшую абсциссы точки касания.

Пусть $y=f(x)$ — уравнение искомой кривой. Уравнение касательной с точкой касания (x,y) запишем в виде

$$Y-y=y'(X-x).$$

Эта прямая пересекает ось абсцисс в точке $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. По условию

$$x-\frac{y}{y'}=\frac{x}{2}\text{, т.е. } xy'=2y.$$

Получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем уравнение.

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x},\ \ln|y|=2\ln|x|+\ln C,\ y=Cx^2.$$

Ответ: искомые кривые — параболы $y=Cx^2$.

Однородные уравнения

Однородное уравнение имеет вид

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однородное уравнение заменой неизвестной функции

$$z=\frac{y}{x}, y=zx$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

102. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

Положим $y=zx,\ dy=zdx+xdz$:

$$\left(x-xz\right)dx+\left(x+xz\right)\left(zdx+xdz\right)=0,$$
$$\left(1-z\right)dx+\left(1+z\right)\left(zdx+xdz\right)=0,$$
$$\left(1+z^2\right)dx+x\left(1+z\right)dz=0.$$

Для неизвестной функции z получено дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его уже освоенными приемами:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+z}{1+z^2}dz=0\,,$$

$$\ln|x|+\operatorname{arctg}z+\frac{1}{2}\ln\left(1+z^2\right)=\frac{1}{2}C,$$
$$2\operatorname{arctg}z+\ln\left(x^2+x^2z^2\right)=C.$$

Осталось вернуться к неизвестной функции y:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\ln\left(x^2+y^2\right)=C.$$

106. $\left(x^2+y^2\right)y'=2xy$.

$y=z\,x$:

$$\left(x^2+x^2z^2\right)\left(xz'+z\right)=2x^2z,$$
$$\left(1+z^2\right)\left(xz'+z\right)=2z,$$
$$x\left(1+z^2\right)z'=z-z^3,$$

$$\frac{z^2+1}{z\left(z^2-1\right)}z'+\frac{1}{x}=0$$
$$\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z}\right)z'+\frac{1}{x}=0$$
$$\ln\left|\frac{x\left(z^2-1\right)}{z}\right|=\ln C,\ \frac{x\left(z^2-1\right)}{z}=C,\ \frac{x^2z^2-x^2}{xz}=C,$$
$$\frac{y^2-x^2}{y}=C,\ y^2-x^2=Cy.$$

При разделении переменных были потеряны решения $z=0, z=1, z=-1$. Последние два получаются из общей формулы при $C=1$.

Ответ: $y^2-x^2=Cy,\ y=0$

107. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

$y = zx$:

$$x\left(xz' + z\right) - xz = x \operatorname{tg} z,\ x^2 z' = x \operatorname{tg} z,\ xz' = \operatorname{tg} z,$$
$$\frac{z'}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{x},\ \ln\left|\sin z\right| = \ln Cx,\ \sin z = Cx,\ \sin\frac{y}{x} = Cx$$

Ответ: $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

118. $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Уравнения такого вида сводятся к однородным сдвигом начала координат, т.е. заменой переменной по формулам

$$x = u + \alpha, y = v + \beta$$

При подходящих α, β .

В нашем случае уравнение превращается в

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v+\beta+2}{u+\alpha+v+\beta-1}\right)^2 .$$

Мы получаем однородное уравнение, если

$\beta + 2 = 0,\ \alpha + \beta - 1 = 0$, т.е. при $\alpha = 3,\ \beta = -2$.

Положим $x = u + 3,\ y = v - 2$. Получим однородное уравнение

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2 .$$

Интегрируем его по вышеописанной схеме.

$$v = zu,$$

$$u\frac{dz}{du} + z = 2\left(\frac{zu}{u+zu}\right)^2,$$

$$u\frac{dz}{du} + z = 2\frac{z^2}{(z+1)^2},$$

$$u\frac{dz}{du} + \frac{z^3+z}{(z+1)^2} = 0,$$

$$\frac{(z^2+2z+1)dz}{z(z^2+1)} + \frac{du}{u} = 0,$$

$$\frac{dz}{z} + \frac{2dz}{z^2+1} + \frac{du}{u} = 0,$$

$$\ln|z| + 2\operatorname{arctg} z + \ln|u| = \ln C,$$

$$\ln|uz| + 2\operatorname{arctg} z = -\ln C,$$

$$\ln Cv = -2\operatorname{arctg}\frac{v}{u},$$

$$\ln C(y+2) = -2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}.$$

Ответ: $\ln C(y+2) = -2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}$.

115. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

Уравнение такого типа нам встречалось при рассмотрении уравнений с разделяющимися переменными. Оно сводится к уравнению, не содержащему явно независимую переменную введением новой неизвестной функции $z = y - x, z' = y' - 1$:

$$-z - 1 + (z+2)(z'+1) = 0,\ (z+2)z' + 1 = 0,$$

$$\frac{z^2}{2} + 2z + x = \frac{C}{2},\ z(z+4) + 2x = C,$$

$$(y-x)(y-x+4) + 2x = C,$$

$$(y-x)^2 + 4y - 2x = C.$$

Ответ: $(y-x)^2 + 4y - 2x = C$.

Некоторые уравнения удается привести к однородным заменой $y = v^\alpha$ или $x = v^\alpha$.

123. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0$.

Уравнение имеет решения $x=0$ и $y=0$. Найдем другие решения. Ограничимся рассмотрением области $x>0, y>0$.

Выражение x^2y^4+1 станет однородным, если выполнить замену $x=\frac{1}{v^2}$. Выполним эту замену и посмотрим, станет ли однородным дифференциальное уравнение.

$$2xdy+\left(x^2y^4+1\right)ydx=0\,,\ x=\frac{1}{v^2}\,.$$

$$\frac{2}{v^2}dy-2\left(\frac{y^4}{v^4}+1\right)y\frac{dv}{v^3}=0,$$
$$v^5dy=\left(y^4+v^4\right)ydv.$$

Получилось однородное уравнение. Проинтегрируем его.

$$y=zv\ \ \left(y,z,v>0\right).$$

$$v^5\left(vdz+zdv\right)=\left(z^4v^4+v^4\right)zvdv,$$
$$\left(vdz+zdv\right)=\left(z^4+1\right)zdv,$$
$$vdz=z^5dv,$$
$$\frac{dz}{z^5}=\frac{dv}{v},$$

$$-\frac{1}{4z^4}=\ln Cv\,,$$

$$4z^4\ln Cv=-1,\ 4\frac{y^4}{v^4}\ln Cv=-1,\ 2\frac{y^4}{v^4}\ln Cv^2=-1,$$
$$2x^2y^4\ln C\frac{1}{x}=-1,\ 2x^2y^4\ln Cx=1,$$,
$$y^4=\frac{1}{2x^2y^4\ln Cx},\ y=\frac{1}{\sqrt[4]{x^2\ln Cx^2}}.$$