

Найдите радиус и интервал сходимости, исследуйте поведение степенных рядов в граничных точках интервала сходимости.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+5)^{\alpha}} \frac{(x-4)^n}{4^n}.$$

При $x \neq 4$ для исследования ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+5)^{\alpha}} \frac{|x-4|^n}{4^n}$ применим признак Даламбера:

$$\frac{\frac{n+1}{(n+6)^{\alpha}} \frac{|x-4|^{n+1}}{4^{n+1}}}{\frac{n}{(n+5)^{\alpha}} \frac{|x-4|^n}{4^n}} = \frac{n+1}{n} \left(\frac{n+5}{n+6} \right)^{\alpha} \frac{|x-4|}{4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|x-4|}{4}.$$

Если $\frac{|x-4|}{4} < 1$, т.е. $|x-4| < 4$, $0 < x < 8$, ряд абсолютно сходится; если $|x-4| > 4$, ряд расходится с нарушением необходимого условия сходимости.

Радиус сходимости равен 4; $(0, 8)$ — интервал сходимости.

Осталось исследовать точки 0 и 8.

В точке 8 получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+5)^{\alpha}}$. Если $\alpha > 2$ ряд сходится; если $\alpha \leq 2$, ряд расходится.

В точке 0 получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+5)^{\alpha}} (-1)^n$. Если $\alpha > 2$ ряд абсолютно сходится; если $\alpha \leq 1$, ряд расходится с нарушением необходимого условия сходимости; если $1 < \alpha \leq 2$ ряд сходится условно.

2820.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n, \mu \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$\left| \frac{\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n} \right| = \left| \frac{\mu-n}{n+1} \right| |x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|$$

Ряд абсолютно сходится, если $|x| < 1$, расходится с нарушением необходимого условия сходимости, если $|x| > 1$.

Рассмотрим точки (± 1) . Мы получаем ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} (-1)^n.$$

Первый ряд знакочередующийся, второй — знакопостоянный.

Если $\mu \leq -1$, $\left| \frac{\mu-n}{n+1} \right| \geq 1$, абсолютная величина членов рядов возрастает, нарушено необходимое условие сходимости, ряды расходятся.

Пусть теперь $\mu > -1$. Применим признак Раабе:

$$n \left(\left| \frac{\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}}{\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)(\mu-n)}{(n+1)!}} \right| - 1 \right) = n \left(\frac{n+1}{n-\mu} - 1 \right) = n \frac{\mu+1}{n-\mu} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu+1$$

Если $\mu > 0$, ряды абсолютно сходятся.

Если $-1 < \mu < 0$, второй ряд расходится.

Для первого ряда установим бесконечную малость последовательности членов.

Положим $a_n = \left| \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} \right|$.

Уже установлено, что

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu+1 > 0$$

Для бесконечно малой последовательности $b_n = \frac{1}{n^{\frac{\mu+1}{2}}}$ имеем

$$n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = n \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu+1}{2} < \mu+1.$$

Поэтому при $n = n_0, n_0 + 1, \dots$ справедливы неравенства

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right), \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

из которых следует, что

$$a_n \leq C b_n, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Заметив еще убывание последовательности a_n , можем утверждать, что при $-1 < \mu < 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1) \cdots (\mu-n+1)}{n!} \text{ условно сходится.}$$

Разложите функции в ряд Тейлора по степеням x и $x+1$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}, |x+1| < 2.$$

Дифференцируя полученные разложения, получаем

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, |x| < 1.$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{n-1}}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(x+1)^n}{2^{n+2}}, |x+1| < 2.$$

Разложите функции в ряд Тейлора по степеням x .

2860.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} &= \frac{1}{2} \frac{(1+x)-(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1+x)}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{(1-x^2)} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2-1-(-1)^n) x^n = \\
&= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1-(-1)^n) x^n, |x| < 1
\end{aligned}$$

2863. Докажите равенство $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha; |x| < 1.$

Достаточно показать, что

$$(1 - 2x \cos \alpha + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha = x \cos \alpha - x^2; |x| < 1.$$

$$\begin{aligned}
(1 - 2x \cos \alpha + x^2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha - 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \cos \alpha \cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \cos n\alpha = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha - \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} (\cos(n-1)\alpha + \cos(n+1)\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \cos n\alpha = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha - \sum_{n=2}^{\infty} x^n \cos n\alpha - \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} \cos n\alpha = \\
&= x \cos \alpha - x^2.
\end{aligned}$$

2885.

$$f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x.$$

$$g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, |x| < 1,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| \leq 1,$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+3}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) x^{2n+1} = \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{4n^2 - 1} x^{2n+1}. \end{aligned}$$

2887.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \sin x = \frac{1}{2i} e^x (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i} (e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} \frac{x^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \left(e^{\frac{\pi n}{4}} - e^{-\frac{\pi n}{4}} \right)}{2i} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}}{n!} x^n \end{aligned}$$