СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите линейные системы дифференциальных уравнений

$$X' = AX + f\ .$$

Пример 1.

796. Решите линейную однородную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

Система имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С собственными числами $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1$.

Для построения решений системы дифференциальных уравнений найдем собственные векторы.

Собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 1$, — это решение алгебраической линейной однородной системы

$$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственный вектор равен $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, соответствующее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$.

$$\lambda_2 = 2:\ A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = Ue^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

$$\lambda_3=-1:\ A+E=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&-5&3\end{pmatrix},\ U=\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix},\ X_2=Ue^{-t}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}e^{-t}.$$

Решения X_1, X_2, X_3 образуют фундаментальную систему решений (ФСР). Формула

$$X=C_1X_1+C_2X_2+C_3X_3$$

дает общее решение системы.

Ответ: $\begin{cases}x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ y=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$

Решим еще несколько неоднородных систем с той же матрицей A.

1а) $X'=AX+f$, где $f=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}e^t$.

Частное решение линейной неоднородной системы найдем методом неопределенных коэффициентов.

Число $\lambda=1$ — собственное для матрицы A. Несмотря на это, следует попытаться найти решение в виде $X=Pe^t$. В данном примере получается несовместная система. Поэтому решение ищем в виде $X=\left(Pt+Q\right)e^t$. Подстановка в систему дает

$$Pt+Q+P=APt+AQ+\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix};$$

$$AP=P,\ AQ=Q+P-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Первое уравнение означает, что P — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_1=1$, $P=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Второе уравнение принимает вид $AQ-Q=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ и имеет решение $\alpha = 2,\ Q = 0$. (Уравнение имеет бесконечно много решений, выбор $Q = 0$ дает самое простое решение). Вектор $\begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} e^t$ — частное решение системы $X' = AX + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$.

Общее решение дается формулой

$$\begin{cases} x = 2te^t + C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ y = 2te^t + C_1e^t - 3C_3e^{-t}, \\ z = 2te^t + C_1e^t + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$$

1б) $f = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix},\ X' = AX + \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$.

Найдем решение линейной неоднородной системы методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим комплексную систему

$$Z' = AZ + \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{it}.$$

(Здесь столбец $\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$ выбран так, что $\operatorname{Re}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{it} = \operatorname{Re}\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) = \begin{pmatrix} -2\cos t \\ \cos t - \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$).

Решение ищем в виде $Z = Se^{it}$. Подстановка в систему дает

$$Sie^{it} = ASe^{it} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \\ -2 \end{pmatrix} e^{it},\ (A - iE)S = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-i & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-i & -1 & -1-i \\ 2 & -1 & -i & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1+2i & 2-i & 4 \\ 1 & 1-i & -1 & -1-i \\ 0 & -3+2i & 2-i & 4+2i \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1+2i & 2-i & 4 \\ 1 & 1-i & -1 & -1-i \\ 0 & -2 & 0 & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{array}\right),\ S = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix},$$

Комплексная система имеет решение $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{it}$, решением вещественной системы $X' = AX + f$

будет $X = \operatorname{Re} Z = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.

Общее решение записывается в виде

$$\begin{cases} x = \cos t + C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = \sin t + C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z = \cos t + C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ.

Запишем характеристический многочлен и найдем его корни:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -3 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2-\lambda & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left((\lambda-2)^2 + 4\right),$$

$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$.

1) Корню $\lambda_1 = -2$ соответствует решение $X = Ue^{-2t}$, где U — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -2$. Найдем U — решение линейной однородной системы с матрицей

$$B = A + 2E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

2) Корню $\lambda_2 = 2+2i$ соответствует решение $X = Ue^{(2+i)t}$, где U — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 2+2i$. Найдем U — решение линейной однородной системы с матрицей

$$B = A-\left(2+i\right)E = \begin{pmatrix} -1-2i & 1 & -3 \\ 2 & -2i & -2 \\ -1 & 3 & -3-2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 3-i & -4-2i \\ -2i & 1-i & -4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 3-i & -4-2i \\ 0 & 3-i & -4-2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 10 & -10-10i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+2i)t} = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}\left(\cos 2t + i\sin 2t\right).$$

Решениями системы являются и функции

$$\operatorname{Re} X = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{2t},\ \operatorname{Im} X = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}\quad \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+2i)t}\quad \begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2-2i)t}$ — комплексная ФСР;

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}\quad \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{2t}\quad \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t}$ — вещественная ФСР.

Рассмотрим неоднородные системы.

2а) $f = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$, $X' = AX + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

Попытаемся найти решение в виде $X = Pe^{-2t}$. Подстановка в систему дает

$$-2P = AP + \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \left(A+2E\right)P = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Мы получили совместную алгебраическую систему с бесконечным числом решений.

Можно взять $P=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Ответ. Система $X'=AX+\begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$ имеет решение $X=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}e^{-2t}$.

2б) $f=\begin{pmatrix}-3\\-10\\-3\end{pmatrix}e^{-2t}$, $X'=AX+\begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}e^{-2t}$.

Здесь попытка найти решение в виде $X=Pe^{-2t}$ приводит к несовместной системе. Поэтому ищем решение в виде $X=\left(Pt+Q\right)e^{-2t}$. Подстановка в систему дает

$$-2Pt-2Q+P=APt+AQ+\begin{pmatrix}-3\\-10\\-3\end{pmatrix};$$

$$AP=-2P,\ AQ=-2Q+P+\begin{pmatrix}3\\10\\3\end{pmatrix}.$$

Первое уравнение означает, что P — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\lambda_1=-2$, $P=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. Второе уравнение принимает вид $AQ+2Q=\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\10\\3\end{pmatrix}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&-3&\alpha+3\\2&4&-2&10\\-1&3&1&\alpha+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&-5&0&\alpha-12\\1&2&-1&5\\0&5&0&\alpha+8\end{array}\right).$$

Система оказывается совместной, если $2\alpha-4=0,\ \alpha=2$ и имеет решение $V=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

Ответ. Система $X'=AX-\begin{pmatrix}3\\10\\3\end{pmatrix}e^{-2t}$ имеет решение $X=\begin{pmatrix}2t+1\\2\\2t\end{pmatrix}e^{-2t}$.

Пример 3.

$$A=\begin{pmatrix}-17 & -31 & 10\\ -17 & -26 & 9\\ -89 & -146 & 49\end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ

Запишем характеристический многочлен и найдем его корни:

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix}-17-\lambda & -31 & 10\\ -17 & -26-\lambda & 9\\ -89 & -146 & 49-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & -5+\lambda & 1\\ -17 & -26-\lambda & 9\\ -89 & -146 & 49-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda & -5 & 1\\ -17 & -43-\lambda & 9\\ -89 & -235 & 49-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ -17 & 2-\lambda & 9\\ -89 & 10-5\lambda & 49-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ -17 & 1 & 9\\ -89 & 5 & 49-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ -17 & 1 & 9\\ -4 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda+4\right)=(2-\lambda)^3$$

1) Построим первую функцию ФСР.

$$B=A-2E=\begin{pmatrix}-19 & -31 & 10\\ -17 & -28 & 9\\ -89 & -146 & 47\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 1\\ -17 & -28 & 9\\ -4 & -6 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & -3 & 1\end{pmatrix},$$

$$U=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 5\end{pmatrix}e^{2t}.$$

2) Построим вторую функцию ФСР.

$$X=(Ut+V)e^{2t},X'=(2Ut+2V+U)e^{2t}$$

$$\left(2Ut+2V+U\right)e^{2t}=A\left(Ut+V\right)e^{2t}$$

$$2Ut+2V+U=A\left(Ut+V\right)$$

$$\begin{cases} AU=2U \\ AV=2V+U \end{cases} \quad \begin{cases} BU=0 \\ BV=U \end{cases}$$

$$U=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},\ BV=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -19 & -31 & 10 & 1 \\ -17 & -28 & 9 & 1 \\ -89 & -146 & 47 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 0 \\ -17 & -28 & 9 & 1 \\ -4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$$V=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}t+1\\t\\5t+2\end{pmatrix}e^{2t}.$$

3) Построим третью функцию ФСР.

$$X=\left(Ut^2+Vt+W\right)e^{2t},X'=\left(2Ut^2+2Vt+2W+2Ut+V\right)e^{2t}$$

$$\left(2Ut^2+2Vt+2W+2Ut+V\right)e^{2t}=A\left(Ut^2+Vt+W\right)e^{2t},$$

$$2Ut^2+2Vt+2W+2Ut+V=A\left(Ut^2+Vt+W\right),$$

$$\begin{cases} AU=2U, \\ AV=2V+2U, \\ AW=2W+V, \end{cases} \begin{cases} BU=0, \\ BV=2U, \\ BW=V. \end{cases}$$

С учетом ранее проведенных вычислений возьмем

$$U=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}, V=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}.$$

Для W запишем систему $BW=V$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -19 & -31 & 10 & 2 \\ -17 & -28 & 9 & 0 \\ -89 & -146 & 47 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 2 \\ -17 & -28 & 9 & 0 \\ -4 & -6 & 2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Можем взять

$$W=\begin{pmatrix}-18\\0\\-34\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}t^2+2t-18\\t^2\\5t^2+4t-34\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}e^{2t},\begin{pmatrix}t+1\\t\\5t+2\end{pmatrix}e^{2t},\begin{pmatrix}t^2+2t-18\\t^2\\5t^2+4t-34\end{pmatrix}e^{2t}$ —ФСР.

3а) Решим линейную неоднородную систему

$$X'=\begin{pmatrix}-17&-31&10\\-17&26&9\\89&-146&49\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}-1\\-1\\-5\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Попытаемся найти решение в виде $X=Se^{2t}$. Для отыскания столбца S получаем систему

$BS=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-19&-31&10&1\\-17&-28&9&1\\-89&-146&47&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-19&-31&10&1\\2&3&-1&0\\-4&-6&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-19&-31&10&1\\2&3&-1&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\2&3&-1&0\end{array}\right),\quad S=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$Se^{2t}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t}$ — решение системы.

3б) Решим линейную неоднородную систему

$$X'=\begin{pmatrix}-17&-31&10\\-17&26&9\\89&-146&49\end{pmatrix}X+\begin{pmatrix}18\\0\\34\end{pmatrix}e^{2t}.$$

Попытаемся найти решение в виде $X=Se^{2t}$.

Для отыскания столбца S получаем систему

$$BS=\begin{pmatrix}-18\\0\\-34\end{pmatrix},\qquad \left(\begin{array}{ccc|c}-19&-31&10&-18\\-17&-28&9&0\\-89&-146&47&-34\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}-19&-31&10&-18\\2&3&-1&18\\-4&-6&2&-34\end{array}\right)$$

Система не имеет решений.

Попытки найти решение в виде $X=\left(Rt+S\right)e^{2t}$ и $X=\left(Qt^2+Rt+S\right)e^{2t}$ тоже ведут к неудаче.

Ищем решение в виде $X=\left(Pt^3+Qt^2+Rt+S\right)e^{2t}$.

Подстановка в систему дает

$$\left(3Pt^2+2Qt+R+2Pt^3+2Qt^2+2Rt+2S\right)=A\left(Pt^3+Qt^2+Rt+S\right)+\begin{pmatrix}18\\0\\34\end{pmatrix}.$$

Для столбцов P,Q,R,S должны выполняться условия

$$BP=0,\ BQ=3P,\ BR=2Q,\ BS=R+\begin{pmatrix}-18\\0\\-34\end{pmatrix}\ \text{(здесь } B=A-2E\text{)}.$$

Из ранее проведенных вычислений следует, что для векторов $U=\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $W=\begin{pmatrix}-9\\0\\-17\end{pmatrix}$

имеют место равенства $BU=0,\ BV=U,\ BW=V$.

Первое уравнение дает $P=\alpha U$. Второе превращается в $BQ=3\alpha U$ и имеет решение $Q=3\alpha V$. Второе превращается в $BR=6\alpha V$ и имеет решение $R=6\alpha W$.

Для отыскания столбца S получаем систему

$$BS=6\alpha W+\begin{pmatrix}-18\\0\\-34\end{pmatrix}=6\alpha\begin{pmatrix}-9\\0\\-17\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-18\\0\\-34\end{pmatrix}$$

Система совместна только при $\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

$$\left(\begin{pmatrix} -19 & -31 & 10 & | & -54\alpha-18 \\ -17 & -28 & 9 & | & 0 \\ -89 & -146 & 47 & | & -102\alpha-34 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & | & -54\alpha-18 \\ -17 & -28 & 9 & | & 0 \\ -4 & -6 & 2 & | & -102\alpha-34 \end{pmatrix} \\ -108\alpha-36=-102\alpha-34,\ 6\alpha=-2,\ \alpha=-\frac{1}{3}\right)$$

При $\alpha=-\frac{1}{3}$ получаем однородную систему $BS=0$, можем взять $S=0$.

Итак, $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t^3-t^2+18t \\ -\frac{1}{3}t^3 \\ -\frac{5}{3}t^3-2t^2+34t \end{pmatrix}e^{2t}$ — решение линейной неоднородной системы.

Пример 4.

$$\begin{cases} x'=3x+y-z-3\cos t-2\sin t \\ y'=x+3y-z-3\sin t+4e^{2t} \\ z'=2x+2y-2\cos t-2\sin t \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ

I. Решаем линейную однородную систему.

Найдем собственные числа матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}=$$
$$=(2-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)+1\big)=(2-\lambda)\left(4-4\lambda+\lambda^2\right)=(2-\lambda)^3,$$

$$\lambda_{1,2,3}=2.$$

Найдем собственные векторы.

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Собственному числу 2 соответствуют два линейно независимых вектор U_1, U_2. Мы получаем два линейно независимых решения $U_1 e^{2t}, U_2 e^{2t}$.

Третье решение ищем в виде

$$X = (Ut + V)e^{2t}.$$

Подставляя это выражение в систему $X' = AX$, получаем уравнения

$$2Ut + 2V + U = AUt + AV.$$

$$AU = 2U, U = \alpha U_1 + \beta U_2,$$

$$AV = 2V + U, \ BV = \alpha U_1 + \beta U_2,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & -1 & \beta \\ 2 & 2 & -2 & \alpha + \beta \end{array}\right), \ \alpha = \beta = 1, \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right), \ V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Получаем решение $X = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} e^t$.

Функции

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \ X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \ X_3 = \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 2t \end{pmatrix} e^{2t}$$ — образуют ФСР системы $X' = AX$.

II. Неоднородные системы.

1) Система $X' = AX + \begin{pmatrix} -3\cos t - 2\sin t \\ -3\sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$ имеет решение $x = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Действительно, рассмотрим комплексную систему

$$Z' = AZ + \begin{pmatrix} -3 + 2i \\ 3i \\ -2 + 2i \end{pmatrix} e^{it}.$$

Решение ищем в виде $Z = Se^{it}$. Подстановка в систему дает

$$Si = AS + \begin{pmatrix} -3+2i \\ 3i \\ -2+2i \end{pmatrix}, \left(A - iE\right)S = \begin{pmatrix} 3-2i \\ 3i \\ 2-2i \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 3-i & 1 & -1 & | & 3-2i \\ 1 & 3-i & -1 & | & -3i \\ 2 & 2 & -i & | & 2-2i \end{array}\right) 3-i \to \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -7+6i & 2-i & | & 6+7i \\ 1 & 3-i & -1 & | & -3i \\ 0 & -4+2i & 2-i & | & 2+4i \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 0 & -3+4i & 0 & | & 4+3i \\ 1 & 3-i & -1 & | & -3i \\ 0 & -2 & 1 & | & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & | & -i \\ 1 & 1-i & 0 & | & -i \\ 0 & -2 & 1 & | & 2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & | & -i \\ 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{array}\right).$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} e^{it},\ X = \operatorname{Re} Z = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Можно провести вещественный вариант вычислений.

Решение ищем в виде

$$X = Q\cos t + R\sin t,$$

$$-Q\sin t + R\cos t = AQ\cos t + AR\sin t + \begin{pmatrix} -3\cos t - 2\sin t \\ -3\sin t \\ -2\cos t - 2\sin t \end{pmatrix}$$

$$AQ - R = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ AR + Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$R = AQ - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ A\left(AQ - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) + Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\left(A^2 + E\right)Q = A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & -4 \\ 4 & 9 & -4 \\ 8 & 8 & -3 \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Найдем решение системы

$$X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Ищем решение в виде $X = Qe^{2t}$:

$$2Q = AQ + (4), (A - 2E)Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & -4 \\ 2 & 2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} - \text{нет решений.}$$

Ищем решение в виде $X = (Qt + R)e^{2t}$:

$$2Qt + 2R + Q = AQt + AR + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AQ = 2Q,\ Q = \alpha U_1 + \beta U_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix};$$

$$AR = 2R + Q - \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & \alpha \\ 1 & 1 & -1 & | & -4 + \beta \\ 2 & 2 & -2 & | & \alpha + \beta \end{pmatrix}, \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \alpha = -4 + \beta \end{matrix} - \text{нет решений}.$$

Ищем решение в виде $X = (Qt^2 + Rt + S)e^{2t}$:

$$2Qt^2+2Rt+2S+2Qt+R=AQt^2+ARt+AS+\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix},$$

$$AQ=2Q,\ Q=\alpha U_1+\beta U_2=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \alpha+\beta\end{pmatrix},$$

$$AR=2R+2Q,\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\alpha\\1&1&-1&2\beta\\2&2&-2&2\alpha+2\beta\end{array}\right),\quad \alpha=\beta;$$

$$\begin{pmatrix}1&1&-1&2\alpha\end{pmatrix},\ R=\begin{pmatrix}2\alpha+\varepsilon\\ \delta\\ \varepsilon+\delta\end{pmatrix}$$

$$AS=2S+R-\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&2\alpha+\varepsilon\\1&1&-1&-4+\delta\\2&2&-2&\varepsilon+\delta\end{array}\right),\ \begin{array}{l}\alpha=2,\\ \varepsilon=-4,\ S=0,\\ \delta=4,\end{array}$$

$$X=\begin{pmatrix}2t^2\\ 2t^2+4t\\ 4t^2\end{pmatrix}e^{2t}.$$

ОТВЕТ: $\begin{cases}x=\left(C_1+C_3(t+1)+2t^2\right)e^{2t}+\cos t,\\ y=\left(C_2+C_3t+2t^2+4t\right)e^{2t}+\sin t,\\ z=\left(C_1+C_2+2C_3t+4t^2\right)e^{2t}.\end{cases}$