

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите линейные системы дифференциальных уравнений

$$X' = AX + f$$

1. 796.

$$\begin{cases} x' = x - y + z, \\ y' = x + y - z, \\ z' = 2x - y. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1,$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t} \end{cases}$$

$$1a) f = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}; (\text{ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad 16) f = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} \quad ; (\text{ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t}),$$

$$1b) f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t \quad (\text{ответ: } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t), \quad 1r) f = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \quad ; (\text{ответ } X = \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} e^t)$$

$$1д) f = \begin{pmatrix} -2 \cos t \\ \cos t - \sin t \\ -2 \cos t \end{pmatrix} \quad (\text{ответ: } X = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix})$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i,$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2+2i)t} \begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(2-2i)t} \text{ — комплексная ФСР;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^{2t} \text{ — вещественная ФСР.}$$

$$2a) f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2b) f_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}, \text{ ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

$$2в) f_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 6 \cos 2t + \sin 2t \\ 3 \cos 2t - \sin 2t \\ 3 \cos 2t \end{pmatrix}, \text{ ответ: } X = e^{2t} \begin{pmatrix} t \cos 2t + \sin 2t \\ t (\cos 2t + \sin 2t) \\ t \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}.$$

$$2г) f_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-2t}, \text{ ответ: } X = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 2 \\ 2t \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -17 & -31 & 10 \\ -17 & -26 & 9 \\ -89 & -146 & 49 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2,3} = 2.$$

$$\text{Ответ: } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} t+1 \\ t \\ 5t+2 \end{pmatrix} e^{2t}, \begin{pmatrix} t^2+2t-18 \\ t^2 \\ 5t^2+4t-34 \end{pmatrix} e^{2t} \text{ — ФСР.}$$

$$3a) f = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{2t}, \text{ ответ: } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$3б) f = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 34 \end{pmatrix} e^{2t}, \text{ ответ: } X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 18t \\ -\frac{1}{3}t^3 \\ -\frac{5}{3}t^3 - 2t^2 + 34t \end{pmatrix} e^{2t}$$

ДЗ

Решите линейные однородные системы

797, 801, 803, 807, 812, 860, 864, 866.

Решите линейные неоднородные системы
837, 839, 843, 845.