

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Линейные однородные уравнения

512. $y'' + 4y' + 3y = 0$;

РЕШЕНИЕ

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$. ФСР составим из функций e^{-x} , e^{-3x} . Общее решение записывается в виде $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

518. $y''' - 8y = 0$;

РЕШЕНИЕ

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i$. Комплексную ФСР составим из функций e^{2x} , $e^{(-1+\sqrt{3}i)x}$, $e^{(-1-\sqrt{3}i)x}$. Можно записать общее решение в комплексной форме

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{(-1+\sqrt{3}i)x} + C_3 e^{(-1-\sqrt{3}i)x}.$$

Вещественную ФСР можно составить из функций e^{2x} , $e^{-x} \cos \sqrt{3}x$, $e^{-x} \sin \sqrt{3}x$. Формула

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \cos \sqrt{3}x + C_3 e^{-x} \sin \sqrt{3}x -$$

вещественное общее решение.

522. $y'' - 2y' + y = 0$;

РЕШЕНИЕ

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda_{1,2} = 1$ кратности 2. ФСР составим из функций e^x , $x e^x$. Общее решение записывается в виде $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Линейные неоднородные уравнения со специальной правой частью

$y'' + y = 4x e^x + 4x \sin x$;

РЕШЕНИЕ

1. ЛОДУ $y'' + y = 0$ имеет ФСР $\cos x$, $\sin x$, общее решение дается формулой

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2.1 Поскольку $\lambda_0 = 1$ не является корнем характеристического уравнения, решение линейного неоднородного ДУ $y'' + y = 4xe^x$ ищем в виде $y = (Ax + B)e^x$:

$$\begin{array}{l} y = (Ax + B)e^x \quad | \quad 1 \\ y' = (Ax + B)e^x + Ae^x \quad | \\ y'' = (Ax + B)e^x + 2Ae^x \quad | \quad 1 \\ \hline y'' + y = 2(Ax + B)e^x + 2Ae^x \end{array}$$

Подстановка в ДУ дает равенство

$$\begin{aligned} 2(Ax + B)e^x + 2Ae^x &= 4xe^x, \\ 2(Ax + B) + 2A &= 4x. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2A = 4, \\ 2A + 2B = 0, \end{cases}$$

из которой находим $A = 2$, $B = -2$. Получаем частное решение $y = 2(x - 1)e^x$ уравнения $y'' + y = 4xe^x$.

2.2 Поскольку $\lambda = \pm i$ — простые корни характеристического уравнения, решение линейного неоднородного ДУ $y'' + y = 4x \sin x$ ищем в виде $y = (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x$:

$$\begin{aligned} y &= (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x \\ y' &= -(Ax^2 + Bx) \sin x + (2Ax + B) \cos x + (Cx^2 + Dx) \cos x + (2Cx + D) \sin x \\ y'' &= -(Ax^2 + Bx) \cos x - 2(2Ax + B) \sin x + 2A \cos x - (Cx^2 + Dx) \sin x + 2(2Cx + D) \cos x + 2C \sin x \\ \hline y'' + y &= -2(2Ax + B) \sin x + 2A \cos x + 2(2Cx + D) \cos x + 2C \sin x \end{aligned}$$

$$-2(2Ax + B) \sin x + 2A \cos x + 2(2Cx + D) \cos x + 2C \sin x = 4x \sin x$$

Приравнявая коэффициенты, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4C = 0, \\ -4A = 4, \\ 2A + 2D = 0, \\ -2B + 2C = 0, \end{cases}$$

Из которой находим $A = -1, B = 0, C = 0, D = 1$. Получаем частное решение

$$y = -x^2 \cos x + x \sin x \text{ уравнения } y'' + y = 4x \sin x.$$

Сумма найденных решений $y = 2(x-1)e^x - x^2 \cos x + x \sin x$ — частное решение всего ДУ

$$y'' + y = 4xe^x + 4x \sin x.$$

ОТВЕТ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2(x-1)e^x - x^2 \cos x + x \sin x$.

Метод вариации постоянных

$$1) \quad 575. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x};$$

РЕШЕНИЕ

ЛОДУ $y'' - 2y' + y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

В соответствии с методом вариации постоянных решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

Для отыскания функций $C_1(x), C_2(x)$ записываем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2' (x+1) e^x = \frac{e^x}{x}. \end{cases}$$

Система дает $C_2' = \frac{1}{x}, C_1' = -1$. Можем взять $C_1(x) = -x, C_2(x) = \ln x$. Получаем частное решение

$$y = -x e^x + x e^x \ln x.$$

Поскольку первое слагаемое — решение ЛОДУ, то функция

$$y = x e^x \ln x$$

тоже является решением линейного неоднородного уравнения

Прибавляя общее решение ЛОДУ получаем общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y = x e^x \ln x + C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

2) Решите дифференциальное уравнение

$$y''' - 8y = \frac{45 - 4x^6}{x^7}$$

Ответ: $y = \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^4} + C_1 e^{2x} + e^{-x} (C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x).$

Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — кубические корни из 8 ($2, 2e^{\frac{2\pi}{3}i}, 2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$). Заметим, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

Общее решение ЛОДУ $y''' - 8y = 0$ можно записать в виде

$$y = C_1 e^{\xi_1 x} + C_2 e^{\xi_2 x} + C_3 e^{\xi_3 x}.$$

Решение уравнения $y''' - 8y = \frac{45 - 4x^6}{x^7}$ ищем в виде

$$y = C_1(x) e^{\xi_1 x} + C_2(x) e^{\xi_2 x} + C_3(x) e^{\xi_3 x}$$

Для отыскания функций $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ записываем систему

$$\begin{cases} C_1' e^{\xi_1 x} + C_2' e^{\xi_2 x} + C_3' e^{\xi_3 x} = 0, \\ C_1' \xi_1 e^{\xi_1 x} + C_2' \xi_2 e^{\xi_2 x} + C_3' \xi_3 e^{\xi_3 x} = 0, \\ C_1' \xi_1^2 e^{\xi_1 x} + C_2' \xi_2^2 e^{\xi_2 x} + C_3' \xi_3^2 e^{\xi_3 x} = f(x), \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на ξ_k^2 , второе — на ξ_k , третье — на 1 и сложим их:

$$3C_k' \xi_k^2 e^{\xi_k x} = f(x), \quad 24C_k' = \xi_k f(x) e^{-\xi_k x} = \xi_k \left(\frac{45 - 4x^6}{x^7} \right) e^{-\xi_k x}$$

$$\begin{aligned}
24C_k &= \xi_k \int \left(\frac{45-4x^6}{x^7} \right) e^{-\xi_k x i} dx = \xi_k \left(\int \frac{45}{x^7} e^{-\xi_k x i} dx - \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx \right) = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \xi_k^2 \int \frac{15}{2x^6} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} + \xi_k^3 \int \frac{3}{2x^5} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} e^{\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} + \int \frac{12}{x^5} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} - \xi_k \int \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \xi_k^2 \int \frac{1}{x^3} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \frac{1}{2x^2} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \xi_k^3 \int \frac{1}{2x^2} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \frac{1}{2x^2} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \int \frac{4}{x^2} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \frac{1}{2x^2} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} + \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} + \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx - \xi_k \int \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i} dx = \\
&= -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \frac{1}{2x^2} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} + \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i}.
\end{aligned}$$

$$24C_k = -\frac{15}{2x^6} \xi_k e^{-\xi_k x i} + \frac{3}{2x^5} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} - \frac{3}{x^4} e^{-\xi_k x i} + \frac{1}{x^3} \xi_k e^{-\xi_k x i} - \frac{1}{2x^2} \xi_k^2 e^{-\xi_k x i} + \frac{4}{x} e^{-\xi_k x i}.$$

$$\begin{aligned}
y &= C_1(x) e^{\xi_1 x} + C_2(x) e^{\xi_2 x} + C_3(x) e^{\xi_3 x} = \\
&= \frac{1}{24} \left(-\frac{15}{2x^6} \xi_1 + \frac{3}{2x^5} \xi_1^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^3} \xi_1 - \frac{1}{2x^2} \xi_1^2 + \frac{4}{x} \right) + \\
&+ \frac{1}{24} \left(-\frac{15}{2x^6} \xi_2 + \frac{3}{2x^5} \xi_2^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^3} \xi_2 - \frac{1}{2x^2} \xi_2^2 + \frac{4}{x} \right) + \\
&+ \frac{1}{24} \left(-\frac{15}{2x^6} \xi_3 + \frac{3}{2x^5} \xi_3^2 - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^3} \xi_3 - \frac{1}{2x^2} \xi_3^2 + \frac{4}{x} \right) = \\
&= \frac{1}{24} \left(-\frac{9}{x^4} + \frac{12}{x} \right) = \frac{1}{2x} - \frac{3}{8x^4}
\end{aligned}$$

3) Решите дифференциальное уравнение

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x^4}$$

ОТВЕТ: $y = -\frac{e^x}{6x} + (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x$.

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x + C_3(x)x^2e^x$$

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'xe^x + C_3'x^2e^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(x+1)e^x + C_3'(x^2+2x)e^x = 0 \\ C_1'e^x + C_2'(x+2)e^x + C_3'(x^2+4x+2)e^x = \frac{e^x}{x^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2'x + C_3'x^2 = 0 \\ C_1' + C_2'(x+1) + C_3'(x^2+2x) = 0 \\ C_1' + C_2'(x+2) + C_3'(x^2+4x+2) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2'x + C_3'x^2 = 0 \\ C_2' + C_3'2x = 0 \\ C_2' + C_3'(2x+2) = \frac{1}{x^4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' = \frac{1}{2x^2} \\ C_2' = -\frac{1}{x^3} \\ C_3' = \frac{1}{2x^4} \end{cases} \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2x} \\ C_2 = \frac{1}{2x^2} \\ C_3 = -\frac{1}{6x^3} \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2x}e^x + \frac{1}{2x}e^x - \frac{1}{6x}e^x = -\frac{1}{6x}e^x$$

4) Решите линейное дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных

$$y^{(4)} + y = \frac{1}{x} + \frac{24}{x^5} = f(x).$$

Пусть $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ — корень 4-й степени из (-1), а $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ — корни 4-й степени из 1.

Решение ищем в виде

$$y = C_1(x)e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2(x)e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3(x)e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4(x)e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x}.$$

Функции C_1, C_2, C_3, C_4 находим из системы

$$\begin{cases} C_1'e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, \\ C_1'\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, \\ C_1'\varepsilon^2\zeta_1^2e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon^2\zeta_2^2e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon^2\zeta_3^2e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon^2\zeta_4^2e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, \\ C_1'\varepsilon^3\zeta_1^3e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon^3\zeta_2^3e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon^3\zeta_3^3e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon^3\zeta_4^3e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1'e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, & |\zeta_k^4 \\ C_1'\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, & |\zeta_k^3 \\ C_1'\varepsilon^2\zeta_1^2e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon^2\zeta_2^2e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon^2\zeta_3^2e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon^2\zeta_4^2e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = 0, & |\zeta_k^2 \\ C_1'\varepsilon^3\zeta_1^3e^{\varepsilon_{\zeta_1}^{\zeta_1}x} + C_2'\varepsilon^3\zeta_2^3e^{\varepsilon_{\zeta_2}^{\zeta_2}x} + C_3'\varepsilon^3\zeta_3^3e^{\varepsilon_{\zeta_3}^{\zeta_3}x} + C_4'\varepsilon^3\zeta_4^3e^{\varepsilon_{\zeta_4}^{\zeta_4}x} = -\varepsilon f(x) & |\zeta_k \end{cases}$$

$$4C_k'e^{\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} = -\varepsilon\xi_k f(x), 4C_k'e^{\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} = -\varepsilon\xi_k f(x), 4C_k' = -\varepsilon\xi_k f(x)e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x},$$

$$\begin{aligned} 4C_k &= -\int \varepsilon\xi_k f(x)e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx = -\int \varepsilon\xi_k \left(\frac{1}{x} + \frac{24}{x^5} \right) e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx = \\ &= -\int \varepsilon\xi_k \frac{1}{x} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx - \int \varepsilon\xi_k \frac{24}{x^5} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx = \frac{1}{x} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \int \frac{1}{x^2} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx + \varepsilon\xi_k \frac{6}{x^4} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \int \varepsilon^2\zeta_k^2 \frac{6}{x^4} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx = \\ &= \frac{1}{x} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \frac{1}{x^2} \varepsilon^3\zeta_k^3 e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \int \frac{2}{x^3} \varepsilon^3\zeta_k^3 e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx + \varepsilon\xi_k \frac{6}{x^4} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} - \varepsilon^2\zeta_k^2 \frac{2}{x^3} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} - \int \varepsilon^3\zeta_k^3 \frac{2}{x^3} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} dx = \\ &= \frac{1}{x} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \frac{1}{x^2} \varepsilon^3\zeta_k^3 e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} - \varepsilon^2\zeta_k^2 \frac{2}{x^3} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \varepsilon\xi_k \frac{6}{x^4} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x}. \end{aligned}$$

$$4C_k = \frac{1}{x} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \frac{1}{x^2} \varepsilon^3\zeta_k^3 e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} - \varepsilon^2\zeta_k^2 \frac{2}{x^3} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x} + \varepsilon\xi_k \frac{6}{x^4} e^{-\varepsilon_{\zeta_k}^{\zeta_k}x}.$$

$$\begin{aligned} 4y &= \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \varepsilon^3\zeta_k^3 - \varepsilon^2\zeta_k^2 \frac{2}{x^3} + \varepsilon\xi_k \frac{6}{x^4} \right) = \frac{4}{x}, \\ y &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Вещественный вариант

$$y^{(4)} + 4y = \frac{1}{x^2} + \frac{30}{x^6} = f(x)$$

$$y = C_1(x)e^x \cos x + C_2(x)e^x \sin x + C_3(x)e^{-x} \cos x + C_4(x)e^{-x} \sin x$$

$$\begin{cases} C_1' e^x \cos x + C_2' e^x \sin x + C_3' e^{-x} \cos x + C_4' e^{-x} \sin x = 0 \\ C_1' e^x (\cos x - \sin x) + C_2' e^x (\sin x + \cos x) - C_3' e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_4' e^{-x} (-\sin x + \cos x) = 0 \\ -2C_1' e^x \sin x + 2C_2' e^x \cos x + 2C_3' e^{-x} \sin x - 2C_4' e^{-x} \cos x = 0 \\ -2C_1' e^x (\cos x + \sin x) + 2C_2' e^x (\cos x - \sin x) + 2C_3' e^{-x} (\cos x - \sin x) + 2C_4' e^{-x} (\sin x + \cos x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' e^x \cos x + C_2' e^x \sin x + C_3' e^{-x} \cos x + C_4' e^{-x} \sin x = 0 \\ C_1' e^x (\cos x - \sin x) + C_2' e^x (\sin x + \cos x) - C_3' e^{-x} (\cos x + \sin x) + C_4' e^{-x} (-\sin x + \cos x) = 0 \\ -C_1' e^x \sin x + C_2' e^x \cos x + C_3' e^{-x} \sin x - C_4' e^{-x} \cos x = 0 \\ -C_1' e^x (\cos x + \sin x) + C_2' e^x (\cos x - \sin x) + C_3' e^{-x} (\cos x - \sin x) + C_4' e^{-x} (\sin x + \cos x) = \frac{1}{2} f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_1' e^x \sin x + C_2' e^x \cos x = \frac{1}{8} f(x) \\ -C_1' e^x \cos x - C_2' e^x \sin x = \frac{1}{8} f(x) \end{cases} \begin{cases} C_1' = \frac{1}{8} f(x) e^{-x} (-\cos x - \sin x) \\ C_2' = \frac{1}{8} f(x) e^{-x} (\cos x - \sin x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -C_3' e^{-x} \sin x + C_4' e^{-x} \cos x = \frac{1}{8} f(x) \\ C_3' e^{-x} \cos x + C_4' e^{-x} \sin x = \frac{1}{8} f(x) \end{cases} \begin{cases} C_3' = \frac{1}{8} f(x) e^x (\cos x - \sin x) \\ C_4' = \frac{1}{8} f(x) e^x (\cos x + \sin x) \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{30}{x^6} \right) e^{-x} (-\cos x - \sin x)$$

$$\int \frac{30}{x^6} e^{-x} (-\cos x - \sin x) dx = -\frac{6}{x^5} e^{-x} (-\cos x - \sin x) + \int \frac{12}{x^5} e^{-x} \sin x dx =$$

$$= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (-\cos x - \sin x) - \frac{3}{x^4} e^{-x} \sin x + \int \frac{3}{x^4} e^{-x} (\cos x - \sin x) dx =$$

$$= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (-\cos x - \sin x) - \frac{3}{x^4} e^{-x} \sin x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x - \sin x) - \int \frac{2}{x^3} e^{-x} \cos x dx =$$

$$= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (-\cos x - \sin x) - \frac{3}{x^4} e^{-x} \sin x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} e^{-x} \cos x + \int \frac{1}{x^2} e^{-x} (\cos x + \sin x) dx$$

$$C_1 = \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} e^{-x} (-\cos x - \sin x) - \frac{3}{x^4} e^{-x} \sin x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} e^{-x} \cos x \right)$$

$$C_2' = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{30}{x^6} \right) e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{30}{x^6} e^{-x} (\cos x - \sin x) dx &= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (\cos x - \sin x) - \int \frac{12}{x^5} e^{-x} \cos x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^{-x} \cos x + \int \frac{3}{x^4} e^{-x} (\cos x + \sin x) dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^{-x} \cos x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x + \sin x) - \int \frac{2}{x^3} e^{-x} \sin x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^{-x} \cos x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} e^{-x} \sin x - \int \frac{1}{x^2} e^{-x} (\cos x - \sin x) dx \end{aligned}$$

$$C_2 = \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} e^{-x} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^{-x} \cos x - \frac{1}{x^3} e^{-x} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} e^{-x} \sin x \right)$$

$$C_3' = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{30}{x^6} \right) e^x (\cos x - \sin x)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{30}{x^6} e^x (\cos x - \sin x) dx &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x - \sin x) - \int \frac{12}{x^5} e^x \sin x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^x \sin x - \int \frac{3}{x^4} e^x (\cos x + \sin x) dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^x \sin x + \frac{1}{x^3} e^x (\cos x + \sin x) - \int \frac{2}{x^3} e^x \cos x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^x \sin x + \frac{1}{x^3} e^x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} e^x \cos x - \int \frac{1}{x^2} e^x (\cos x - \sin x) dx \end{aligned}$$

$$C_3 = \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} e^x \sin x + \frac{1}{x^3} e^x (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} e^x \cos x \right)$$

$$C_4' = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{30}{x^6} \right) e^x (\cos x + \sin x)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{30}{x^6} e^x (\cos x + \sin x) dx &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x + \sin x) + \int \frac{12}{x^5} e^x \cos x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x + \sin x) - \frac{3}{x^4} e^x \cos x + \int \frac{3}{x^4} e^x (\cos x - \sin x) dx \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x + \sin x) - \frac{3}{x^4} e^x \cos x - \frac{1}{x^3} e^x (\cos x - \sin x) - \int \frac{2}{x^3} e^x \sin x dx = \\ &= -\frac{6}{x^5} e^x (\cos x + \sin x) - \frac{3}{x^4} e^x \cos x - \frac{1}{x^3} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} e^x \sin x - \int \frac{1}{x^2} (\cos x + \sin x) dx \end{aligned}$$

$$C_4 = \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} e^x (\cos x + \sin x) - \frac{3}{x^4} e^x \cos x - \frac{1}{x^3} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} e^x \sin x \right)$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} (-\cos x - \sin x) - \frac{3}{x^4} \sin x - \frac{1}{x^3} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} \cos x \right) \cos x + \\
&+ \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} \cos x - \frac{1}{x^3} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} \sin x \right) \sin x + \\
&+ \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} (\cos x - \sin x) + \frac{3}{x^4} \sin x + \frac{1}{x^3} (\cos x + \sin x) + \frac{1}{x^2} \cos x \right) \cos x + \\
&+ \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} (\cos x + \sin x) - \frac{3}{x^4} \cos x - \frac{1}{x^3} e^x (\cos x - \sin x) + \frac{1}{x^2} \sin x \right) \sin x = \\
&\frac{1}{8} \left(\frac{6}{x^5} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{8} \left(-\frac{6}{x^5} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{4x^2}
\end{aligned}$$

Задача Коши

$$588. \quad y^{IV} + y'' = 2 \cos x; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = y'''(0) = 0.$$

РЕШЕНИЕ

Общее решение ЛОДУ записывается в виде

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Решение линейного неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = x(A \cos x + B \sin x).$$

$$\begin{aligned}
y &= x(A \cos x + B \sin x), \\
y' &= x(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x), \\
y'' &= x(-A \cos x - B \sin x) + 2(-A \sin x + B \cos x), \\
y''' &= x(A \sin x - B \cos x) + 3(-A \cos x - B \sin x), \\
y^{IV} &= x(A \cos x + B \sin x) + 4(A \sin x - B \cos x), \\
\hline
y^{IV} + y'' &= 2(A \sin x - B \cos x).
\end{aligned}$$

Подставляя в ДУ, получаем равенство

$$2(A \sin x - B \cos x) = 2 \cos x,$$

из которого находим коэффициенты $A = 0$, $B = -1$ и частное решение

$$y = -x \sin x.$$

Общее решение получаем в виде

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x \sin x.$$

Для производных получаем выражения

$$y' = C_2 - C_3 \sin x + C_4 \cos x - x \cos x - \sin x, y'' = -C_3 \cos x - C_4 \sin x + x \sin x - 2 \cos x,$$

$$y''' = C_3 \sin x - C_4 \cos x + x \cos x + 3 \sin x.$$

В точке $x = 0$ имеем $y(0) = C_1 + C_3$, $y'(0) = C_2 + C_4$, $y''(0) = -C_3 - 2$, $y''' = -C_4$.

Для выполнения начальных условий следует взять $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -2$, $C_4 = 0$.

ОТВЕТ: $y = x - 2 \cos x - x \sin x$.