Занятие 11

Дифференциальные уравнения высших порядков

422. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

РЕШЕНИЕ. Примем $z = y'$ за новую неизвестную функцию. Для z получаем уравнение

$$2xzz' = z^2 - 1$$

с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{2zz'}{z^2 - 1} = \frac{1}{x},$$

и интегрируем

$$\ln\left|z^2 - 1\right| = \ln C_1 x,\ z^2 - 1 = C_1 x.$$

Возвращаясь к неизвестной функции y, приходим к уравнению

$$y'^2 = C_1 x + 1,$$

Из которого получаем

$$y' = \pm\sqrt{C_1 x + 1},\ y = \pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1 x + 1\right)^{3/2} + C_2,\ 9C_1^2\left(y - C_2\right)^2 = 4\left(C_1 x + 1\right)^3 \quad \left(C_1 \neq 0\right).$$

При разделении переменных были потеряны решения для которых

$$z = \pm 1,\ y' = \pm 1,\ y = \pm\left(x + C\right),\ y^2 = \left(x + C\right)^2.$$

ОТВЕТ: $9C_1^2\left(y - C_2\right)^2 = 4\left(C_1 x + 1\right)^3 \quad \left(C_1 \neq 0\right)$, $y^2 = \left(x + C\right)^2$.

425. $y'' = 2yy'$.

РЕШЕНИЕ. В обеих частях уравнения стоят полные производные, уравнение допускает запись в виде

$$\left(y'\right)' = \left(y^2\right)'.$$

Интегрирование дает семейство дифференциальных уравнений

$$y' = y^2 + D.$$

Дальнейшее интегрирование зависит от знака D.

1) $D = 0,\ y' = y^2, \frac{y'}{y^2} = 1, \frac{1}{y} = -\left(x + C\right), y = -\frac{1}{x + C}; y = 0$.

2) $y' = y^2 + C_1^2, \dfrac{y'}{y^2 + C_1^2} = 1,\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{C_1} = C_1 x + C_2, y = C_1 \operatorname{tg}\left(C_1 x + C_2\right)$.

3) $y' = y^2 - C_1^2, \dfrac{y'}{y^2 - C_1^2} = 1,\ \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2\left(C_1 x + C_2\right),\ \dfrac{y - C_1}{y + C_1} = \pm e^{2\left(C_1 x + C_2\right)}$.

ОТВЕТ: $y = -\dfrac{1}{x + C}$, $y = C_1 \operatorname{tg}\left(C_1 x + C_2\right)$, $\dfrac{y - C_1}{y + C_1} = \pm e^{2\left(C_1 x + C_2\right)}$.

434. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит x. Принимаем $z = y'$ за неизвестную функцию, а y — за независимую переменную: $z = z\left(y\right)$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

При такой операции могут теряться постоянные решения, но наше уравнение таких решений не имеет.

В новых переменных уравнение принимает вид

$$z\frac{dz}{dy} + z^2 = 2e^{-y}.$$

Запишем уравнение в симметричной форме и подберем интегрирующий множитель e^{2y}.

$$zdz + \left(z^2 - 2e^{-y}\right)dy = 0 \mid 2e^{2y},$$

$$2ze^{2y}dz + \left(2z^2e^{2y} - 4e^{y}\right)dy = 0.$$

$$z^2e^{2y} - 4e^{y} = 4C_1.$$

Вернемся к исходным переменным:

$$y'^2e^{2y} - 4e^{y} = 4C_1,$$

Для удобства введем функцию $z = e^{y}$, $z > 0$, $z' = e^{y}y'$, и напишем

$$z'^2 - 4z = 4C_1, z'^2 = 4\left(z + C_1\right), z' = \pm 2\sqrt{z + C_1};$$

$$\frac{z'}{2\sqrt{z + C_1}} = \pm 1,\ \sqrt{z + C_1} = \pm\left(x + C_2\right),\ z + C_1 = \left(x + C_2\right)^2.$$

ОТВЕТ: $e^{y} + C_2 = \left(x + C_1\right)^2$.

437. $y'' = e^y$.

РЕШЕНИЕ. Умножив обе части уравнения на $2y'$, сформируем полные производные:

$$2y'y'' = 2e^y y',$$
$$y'^2 = 2\left(e^y + D\right).$$

1) $D = 0$:

$$y'^2 = 2e^y,\ y' = \pm\sqrt{2}e^{y/2},\ e^{-y/2}y' = \pm\sqrt{2},$$
$$-2e^{-y/2} = \pm\sqrt{2}\left(x+C\right),\ -\sqrt{2}e^{-y/2} = \pm\left(x+C\right),$$
$$2e^{-y} = \left(x+C\right)^2.$$

2) $D<0,\ D=-D_1^2,\ D_1>0$:

$$y'^2 = 2\left(e^y - D_1^2\right),\ y' = \pm\sqrt{2}\sqrt{e^y - D_1^2},\ \frac{y'}{\sqrt{e^y - D_1^2}} = \pm\sqrt{2},\ \frac{D_1 e^{-y/2} y'}{\sqrt{1-D_1^2 e^{-y}}} = \pm\sqrt{2}D_1$$

$$2\arcsin\left(D_1 e^{-y/2}\right) = \pm\sqrt{2}\left(D_1 x + D_2\right),\ \arcsin\left(D_1 e^{-y/2}\right) = \pm\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right),$$

$$D_1 e^{-y/2} = \pm\sin\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right),\ D_1^2 e^{-y} = \sin^2\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Полагая $D_1 = \sqrt{2}C_1, D_2 = \sqrt{2}C_2$, приходим к равенству

$$2C_1^2 e^{-y} = \sin^2\left(C_1 x + C_2\right).$$

3) $D>0, D=D_1^2, D_1>0$:

$$y'^2 = 2\left(e^y + D_1^2\right),\ y' = \pm\sqrt{2}\sqrt{e^y + D_1^2},\ \frac{y'}{\sqrt{e^y + D_1^2}} = \pm\sqrt{2},\ \frac{D_1 e^{-y/2} y'}{\sqrt{1+D_1^2 e^{-y}}} = \pm\sqrt{2}D_1$$

$$z = e^{-y/2}, z' = -\frac{1}{2}e^{-y/2}y',\ \frac{-2D_1 z'}{\sqrt{1+D_1^2 z^2}} = \pm\sqrt{2}D_1$$

$$2\ln\left(D_1 z + \sqrt{1+D_1^2 z}\right) = \pm\sqrt{2}\left(D_1 x + D_2\right),\ \ln\left(D_1 z + \sqrt{1+D_1^2 z}\right) = \pm\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_1 z = \pm\,\mathrm{sh}\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right),\ D_1^2 z^2 = \sin^2\left(\frac{D_1}{\sqrt{2}}x + \frac{D_2}{\sqrt{2}}\right).$$

Полагая $D_1 = \sqrt{2}C_1, D_2 = \sqrt{2}C_2$, приходим к равенству

$$2C_1^2 e^{-y} = \mathrm{sh}^2\left(C_1 x + C_2\right).$$

ОТВЕТ: $2e^{-y}=\left(x+C\right)^2$, $2C_1^2e^{-y}=\sin^2\left(C_1x+C_2\right)$, $2C_1^2e^{-y}=\operatorname{sh}^2\left(C_1x+C_2\right)$.

ИЛИ

$$
\begin{aligned}
&y'^2=2\left(e^y+D\right),\ e^{-y}y'^2=2\left(1+De^{-y}\right),\ \left(e^{-y/2}y'\right)^2=2\left(1+De^{-y}\right),\\
&z=e^{-y/2}, z'=-\frac{1}{2}e^{-y/2}y',\\
&\left(-2z'\right)^2=2\left(1+Dz^2\right),\ 2z'^2=1+Dz^2.
\end{aligned}
$$

1) $D=0:\ 2z'^2=1,\ z'=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+C\right), 2z^2=\left(x+C\right)^2$

2) $D<0,\ D=-D_1^2,\ D_1>0:$

$$
\begin{aligned}
&2z'^2=1-D_1^2z^2,\\
&D_1z=\sin u,\ \ D_1z'=u'\cos u\\
&2\frac{\cos^2 u}{D_1^2}u'^2=\cos^2 u,\ u'^2=\frac{D_1^2}{2},\ u'=\pm\frac{D_1}{\sqrt{2}}\\
&u=\pm\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},\ D_1z=\pm\sin\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},\ D_1^2z^2=\sin^2\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},
\end{aligned}
$$

3) $D>0,\ D=D_1^2,\ D_1>0:$

$$
\begin{aligned}
&2z'^2=1+D_1^2z^2,\\
&D_1z=\operatorname{sh}u,\ \ D_1z'=u'\operatorname{ch}u\\
&2\frac{\operatorname{ch}^2 u}{D_1^2}u'^2=\operatorname{ch}^2 u,\ u'^2=\frac{D_1^2}{2},\ u'=\pm\frac{D_1}{\sqrt{2}}\\
&u=\pm\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},\ D_1z=\pm\operatorname{sh}\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},\ D_1^2z^2=\operatorname{sh}^2\frac{D_1x+D_2}{\sqrt{2}},
\end{aligned}
$$

Полагая $D_1=\sqrt{2}C_1, D_2=\sqrt{2}C_2$, приходим к равенству

$$2C_1^2e^{-y}=\operatorname{sh}^2\left(C_1x+C_2\right).$$

438. $y''-xy'''+y'''^3=0$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит y, y', поэтому вводим неизвестную функцию $z=y''$ и получаем уравнение первого порядка

$$z=xz'-z'^3.$$

Это уравнение Клеро. Решаем его параметризацией:

$$p=z', z=xp-p^3,\ dz=pdx+xdp-3p^2dp,\ pdx=pdx+xdp-3p^2dp,\ \left(x-3p^2\right)dp=0\,.$$

1) $dp=0, p=C_1,\ z=C_1x-C_1^3.$

Возвращаемся к неизвестной функции y и дважды интегрируем:

$$y''=C_1x-C_1^3, y'=C_1\frac{x^2}{2}-C_1^3x+C_2, y=C_1\frac{x^3}{6}-C_1^3\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3\,.$$

2) $x=3p^2,\ p=\pm\sqrt{\frac{x}{3}},\ z=\pm\left(x\sqrt{\frac{x}{3}}-\frac{x^{3/2}}{3\sqrt{3}}\right),\ z=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2}\,.$

Возвращаемся к неизвестной функции y и дважды интегрируем:

$$y''=\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}x^{3/2},\ y'=\pm\frac{4}{15\sqrt{3}}x^{5/2}+C_1,\ y=\pm\frac{8}{105\sqrt{3}}x^{7/2}+C_1x+C_2\,.$$

ОТВЕТ: $y=C_1\frac{x^3}{6}-C_1^3\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$, $y=\pm\frac{8}{105\sqrt{3}}x^{7/2}+C_1x+C_2$.

456. $y'y'''=2y''^2$.

РЕШЕНИЕ. Деление на $y'y''$ формирует полные производные:

$$\frac{y'''}{y''}=\frac{2y''}{y'},\ \ln\left|y''\right|=2\ln\left|y'\right|+\ln C_1, y''=C_1y'^2\,.$$

Деление на y'^2 опять формирует полные производные:

$$\frac{y''}{y'^2}=C_1,\frac{1}{y'}=C_1x+C_2,\ y'=\frac{1}{C_1x+C_2}, y=\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1x+C_2\right|+C_3\,.$$

ОТВЕТ: $y=\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1x+C_2\right|+C_3\quad\left(y=A\ln\left(Bx+C\right)\right).\ y=C_1x+C_2\,.$

459. $yy''+y'^2=1\,.$

РЕШЕНИЕ. Мы видим уравнение с полными производными справа и слева. Интегрирование дает новое уравнение с полными производными.

$$yy'=x+C_1.$$

Еще одно интегрирование завершает работу:

$$y^2=x^2+C_1x+C_2\,.$$

ОТВЕТ: $y^2 = x^2 + C_1 x + C_2$.