ЗНАМЕНИТЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Интеграл Дирихле

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha$

Если $\alpha > 0$, выполним в интеграле замену переменной по формуле $y = \alpha x$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x}\,\alpha dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Если $\alpha = 0$, то подынтегральная функция становится нулевой. Если $\alpha < 0$, значение $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ интеграл получает за счет нечетности синуса.

2) $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx = \pi$.

Прибегнем к интегрированию по частям:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\left(1-\cos 2x\right)\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = 0 + 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

3) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = -\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}\,dx = 0 + \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

4) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$.

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 dx=-\frac{\sin^3 x}{2x^2}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{3}{2x}\sin^2 x\cos x\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x}{x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\left(2\cos^2 x-\sin^2 x\right)}{x}dx=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2x\right)}{x}dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{1}{2}\sin x+\frac{3}{4}\left(\sin 3x-\sin x\right)}{x}dx=\frac{3\pi}{8}.$$

5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}dx=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}dx=-\frac{1}{2x^2}\left(\sin x-x\cos x\right)\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$$

Интеграл Эйлера-Пуассона

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\left(x^2+2x+3\right)}dx=\frac{3\sqrt{\pi}}{2e^2}$.

Выделим в показателе полный квадрат и выполним замену переменной.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\left(x^2+2x+3\right)}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\left(\left(x+1\right)^2+2\right)}dx=\left[y=x+1\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y-1\right)^2e^{-\left(y^2+2\right)}dy=e^{-2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(y^2-2y+1\right)e^{-y^2}dy.$$

Интеграл представляется в виде суммы трех слагаемых. Рассмотрим их по очереди:

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi}$,

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}ye^{-y^2}dy=0$, ввиду нечетности подынтегральной функции,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y^2e^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}ye^{-y^2}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=0+\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для интеграла I получаем значение $\frac{3\sqrt{\pi}}{2e^2}$.

2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+x^{-2}\right)}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$.

Выполним замену переменной по формуле $x = \frac{1}{y}$:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+x^{-2}\right)}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(y^2+y^{-2}\right)}\frac{dy}{y^2}.$$

Теперь можно написать

$$2I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+x^{-2}\right)}dx + \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(y^2+y^{-2}\right)}\frac{dy}{y^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+x^{-2}\right)}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Выполним замену переменной $z = x - \frac{1}{x},\ dz = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx,\ z^2 = x^2 - 2 + x^{-2}$:

$$2I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2-2}dz = e^{-2}\sqrt{\pi}.$$

В итоге $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$.

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-e^{-4x^2}}{x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Проведем интегрирование по частям:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-e^{-4x^2}}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\left(e^{-x^2}-e^{-4x^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \frac{-2xe^{-x^2}+4xe^{-4x^2}}{x}dx =$$

$$= 0 + \int\limits_0^{+\infty}\left(-2e^{-x^2}+8e^{-4x^2}\right)dx = -2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx + 8\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x^2}dx$$

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\ \ I_2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-4x^2}dx = \left[y=2x\right] = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{4},$$

$$I = -2I_1 + 8I_2 = \sqrt{\pi}.$$

Интегралы Френеля

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx = \int_0^{+\infty} \cos\left(x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

.

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2+2x+3\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2+\sin 2\right).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2+2x+3\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\left(x+1\right)^2+2\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(y^2+2\right)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(y^2\right)\cos 2+\cos\left(y^2\right)\sin 2dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 2+\sin 2\right).$$

2) $\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\cos 2xdx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 1-\sin 1\right).$

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\cos 2xdx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2\right)\cos 2xdx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2+2x\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(x^2-2x\right)\right) =$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\left(x+1\right)^2-1\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(\left(x-1\right)^2-1\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(y^2-1\right)dy+\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(z^2-1\right)dz\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(y^2-1\right)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\left(y^2\right)\cos 1-\cos\left(y^2\right)\sin 1dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos 1-\sin 1\right).$$

Домашнее задание. 3804, 3808, 3809, 3819, 3821, 3828, 3833