

## ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Различными способами расставьте пределы интегрирования

$$4082. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz$$

Сведите тройной интеграл к однократному

$$4085. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz$$

Вычислите тройные интегралы:

$$4077. \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}, \text{ тело } V \text{ ограничено поверхностями } x+y+z=1, x=0, y=0, z=0.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

$$4079. \iiint_V \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, \text{ тело } V \text{ ограничено поверхностью } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4}{5} \pi abc.$$

$$4080. \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \text{ тело } V \text{ ограничено поверхностями } x^2 + y^2 = z^2, z=1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6}.$$

$$4088. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).$$

$$4091. \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz, \text{ тело } V \text{ ограничено поверхностями } x^2 + y^2 = 2z, z=2.$$

$$\text{Ответ: } \frac{16\pi}{3}.$$

4092.  $\iiint_V x^2 dx dy dz$ , тело  $V$  ограничено поверхностями  $z = ay^2, z = by^2, y > 0$  ( $0 < a < b$ ),

$z = \alpha x, z = \beta x$  ( $0 < \alpha < \beta$ ),  $z = h$  ( $h > 0$ ).

Ответ:  $\frac{2}{27} \left( \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}$ .

Найдите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4102.  $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0$ .

Ответ:  $\frac{7}{24}$ .

4108.  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2)$ .

Ответ:  $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$ .

4118 б).  $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1, a, b, c > 0; x, y, z \geq 0$ .

Ответ:  $\frac{abc}{1680}$ .

ДЗ

Различными способами расставьте пределы интегрирования.

4081.  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$ .

4083.  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz$ .

Сведите тройной интеграл к однократному.

4084.  $\int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta$ .

Вычислите тройные интегралы:

4076.  $\iiint_V xy^2 z^3 dx dy dz$ , тело  $V$  ограничено поверхностями  $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ .

Ответ:  $\frac{1}{364}$ .

4078.  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , тело  $V$  ограничено поверхностями  $z = x^2 + y^2 + z^2, x = 0, y = 0, z = 0$ .

Ответ:  $\frac{1}{48}$ .

4087.  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , тело  $V$  ограничено поверхностью  $x^2 + y^2 + z^2 = z$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{10}$ .

4090.  $\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz$ ,  $V$  — внутренность эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Ответ:  $\frac{\pi^2 abc}{4}$ .

Найдите объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

4101.  $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2$ .

Ответ:  $\frac{3}{35}$ .

4110.  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0 (0 < a < b)$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$

4118 а).  $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1 (x, y, z \geq 0)$ .

Ответ:  $\frac{abc}{90}$