ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Сведите двойной интеграл к повторному и вычислите интеграл:

1) $\iint\limits_{E:\,0\le x,y\le 1} xydxdy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^1 ydy = \frac{1}{4}$.

2) $\iint\limits_{E:\,x,y\ge 0,\,x+y\le 1} ydxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2\,dx = \frac{1}{6}$.

3) $\iint\limits_E xdxdy,\ E:-$ параллелограмм с вершинами $(0,0),\,(1,0),\,(2,1),\,(1,1)$.

$$\iint\limits_E xdxdy = \int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{y+1} xdx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left((y+1)^2-y^2\right)dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1(2y+1)dy = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$\iint\limits_E xdxdy = \int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^x dy + \int\limits_1^2 xdx\int\limits_{x-1}^1 dy = \int\limits_0^1 x^2dx + \int\limits_1^2 x(2-x)dx = \frac{1}{3} + \left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}+3-\frac{7}{3} = 1.$$

4) $\iint\limits_E xdxdy,\ E:-$ верхний единичный полукруг.

$$\iint\limits_E ydxdy = \int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1\left(1-x^2\right)dx = \int\limits_0^1\left(1-x^2\right)dx = \frac{2}{3},$$

$$\iint\limits_E ydxdy = \int\limits_0^1 ydy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = 2\int\limits_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy = -2\left(1-y^2\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Вычислите интегралы:

9) 3934. $\iint\limits_E |xy|dxdy$, если E — круг радиуса a с центром в начале координат.

$$\iint\limits_E |xy|dxdy = 4\iint\limits_{E_1} xydxdy = 4\int\limits_0^1 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy = 2\int\limits_0^1 x\left(1-x^2\right)dx = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\iint\limits_E |xy|dxdy = 4\iint\limits_{E_1} xydxdy = 4\iint\limits_{E_2} r^3\cos\varphi\sin\varphi drd\varphi = 4\int\limits_0^1 r^3dr\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}.$$

10) 3936. $\iint\limits_E y^2dxdy$, если E ограничено осью абсцисс и первой аркой циклоиды

$x = a(t-\sin t),\ y = a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$.

$$\iint_E y^2 dxdy = \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{f(x)} y^2 dy = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi a} f^3(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^4 (1-\cos t)^4\,dt = \frac{16}{3}a^4 \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2}dt =$$

$$= \frac{32}{3}a^4 \int_0^{\pi} \sin^8 u du = \frac{32}{3}a^4 \frac{7!!}{8!!}\pi = \frac{32}{3}a^4 \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = a^4 \frac{1\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 6} = \frac{35}{12}a^4.$$

Вычислите интегралы:

11) $\iint\limits_{x,y\ge 0,\ 2x+3y\le 6} (5x+7y)\,dxdy = [x=3u, y=2v] = 6 \iint\limits_{u,v\ge 0,\ u+v\le 1} (15x+14y)\,dxdy = 6\cdot 29\cdot \frac{1}{6} = 29$.

12) $\iint\limits_E (7x-y)\,dxdy,\ E: 0\le x+y\le 3,\ 0\le 3x-y\le 4$.

$$\iint_E (7x-y)\,dxdy = \begin{bmatrix} u = x+y \\ v = 3x-y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\iint\limits_{0\le u\le 3, 0\le v\le 4} (u+2v)\,dudv =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4\int_0^3 udu + 3\int_0^4 vdv\right) = \frac{1}{4}\left(4\cdot\frac{9}{2} + 6\cdot\frac{16}{2}\right) = \frac{1}{4}(18+48) = \frac{33}{2}.$$

15)

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1} \left(2x^2+5y^2\right)dxdy = [x=2u, y=3v] = \iint\limits_{u^2+v^2\le 1} \left(8u^2+45v^2\right)6dudv =$$

$$= 53\cdot 3\iint\limits_{u^2+v^2\le 1} \left(u^2+v^2\right)dudv = [u = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi] = 53\cdot 3 \iint\limits_{\substack{0\le\varphi\le 2\pi \\ 0\le r\le 1}} r^3 dr d\varphi = 159\cdot 2\pi\int_0^1 r^3 dr = \frac{159}{2}\pi.$$

16) 3969. $\iint\limits_E (x+y)\,dxdy$, где E ограничено линиями $y^2 = 2x,\ x+y=4,\ x+y=12$.

$I = \iint\limits_E (x+y)\,dxdy = \begin{bmatrix} u = x+y, & x = u-v \\ v = y, & y = v \end{bmatrix} = \iint\limits_{E_1} ududv$, где E_1 ограничено линиями

$v^2 = 2(u-v),\ u=4,\ u=12$.

$v^2 = 2u-2v,\ (v+1)^2 = 2u+1,\ v = \pm\sqrt{2u+1}-1.$

$$I = \int_4^{12} udu \int\limits_{-\sqrt{2u+1}-1}^{\sqrt{2u+1}-1} dv = 2\int_4^{12} u\sqrt{2u+1}du = \begin{bmatrix} t = \sqrt{2u+1} \\ u = \dfrac{t^2-1}{2} \end{bmatrix} = \int_3^5 \left(t^2-1\right)t^2 dt = \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{8156}{15}.$$

Вычислите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

18) 3988. $\left(x^3+y^3\right)^2 = x^2+y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ (перейти к полярным координатам).

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi;\ r^6\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2 = r^2,\ r^2 = \frac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi};$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\varphi+\sin\varphi)\,d\varphi}{(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\left(\cos^2\varphi-\cos\varphi\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$

$$=\left[u=\sin\varphi-\cos\varphi\right] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(2-u^2\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}u^2\right)} = \int_{-1}^{1}\frac{du}{\left(2-u^2\right)\left(1+u^2\right)} = 2\int_0^1\frac{du}{\left(2-u^2\right)\left(1+u^2\right)} =$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(\frac{1}{2-u^2}+\frac{1}{1+u^2}\right)du = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}+\operatorname{arctg}u\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{\pi}{6}.$$

19) 3996. $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x\ \left(0<a<b, 0<\alpha<\beta\right)$.

$$u = x+y, v=\frac{y}{x};\ \ y = vx,\ u = x+vx,\ u = x(1+v);$$

$$x=\frac{u}{1+v}, y=\frac{uv}{1+v};$$

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix} = \frac{1}{x}+\frac{y}{x^2} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{u}{u^2}(1+v)^2 = \frac{(1+v)^2}{u},\ J = \frac{u}{(1+v)^2};$$

$$S = \iint_E \frac{u}{(1+v)^2}\,dudv = \int_a^b udu\int_\alpha^\beta\frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2}\left(b^2-a^2\right)\left(\frac{1}{1+\alpha}-\frac{1}{1+\beta}\right).$$

20) 3999 б). $E:\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4;\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ 8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$

$$x = ar\cos^3\varphi, y = ar\sin^3\varphi, J = 3abr\cos^2\varphi\sin^2\varphi;$$

$$S = 3ab\iint_{E_1} r\cos^2\varphi\sin^2\varphi drd\varphi,\ E_1: 1\le r\le 8, 1\le \operatorname{tg}\varphi\le 2.$$

$$S = 3ab\int_1^8 rdr\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi d\varphi = \frac{189}{2}ab\frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}\sin^2 2\varphi d\varphi = \frac{189}{16}ab\int_{\pi/4}^{\operatorname{arctg}2}(1-\cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$=\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\sin\left(4\operatorname{arctg}2\right)\right) = \frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}+\frac{6}{25}\right) = \frac{189}{16}\left(\frac{6}{25}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$$

$$\left(\operatorname{tg}\alpha = 2, \operatorname{tg}2\alpha = \frac{4}{1-4} = -\frac{4}{3}, \sin 4\alpha = \frac{-\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{9}} = -\frac{24}{25}\right).$$

21)

3966.

$$\iint\limits_{E:|x|+|y|\le 1}\left(|x|+|y|\right)dxdy=4\iint\limits_{E_1:x+y\le 1;\ x,y\ge 0}\left(x+y\right)dxdy=8\iint\limits_{E_1}ydxdy=$$

$$=8\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}ydy=4\int\limits_0^1\left(1-x\right)^2dx=\frac{4}{3}.$$

22)

$$S=2\left(\int\limits_0^{\sqrt{pq}}dy\int\limits_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}}dx\right)=2\left(\int\limits_0^{\sqrt{pq}}\left(\frac{q^2-y^2}{2q}-\frac{y^2-p^2}{2p}\right)dy\right)=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{pq}}\left(\left(p+q\right)-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)y^2\right)dy=\left(p+q\right)\sqrt{pq}-\frac{p+q}{pq}\frac{pq\sqrt{pq}}{3}=$$

$$=\left(p+q\right)\sqrt{pq}-\left(p+q\right)\frac{\sqrt{pq}}{3}=\frac{2}{3}\left(p+q\right)\sqrt{pq}$$

23)

3997. Произведя надлежащую замену переменных, найдите площади, ограниченные следующими кривыми: $xy=a^2,\ xy=2a^2;\ y=x,\ y=2x$.

$$S=\iint\limits_E dxdy\text{ , } u=xy,\ v=\frac{y}{x};\ J^{-1}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v;$$

$$S=\iint\limits_{E_1:a^2\le u\le 2a^2,1\le v\le 2}\frac{1}{2v}dudv=\frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{2a^2}du\int\limits_1^2\frac{dv}{v}=\frac{1}{2}a^2\ln 2$$