ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \lim_{\lambda_\tau \to 0} \sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)\,\Delta x_i \Delta_j$$

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

1) $\iint\limits_E dxdy = \mu E$

2) Линейность

$$\iint\limits_E \left(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\right) dxdy = \alpha \iint\limits_E f(x,y)\,dxdy + \beta \iint\limits_E g(x,y)\,dxdy$$

3) Аддитивность $E = E_1 \cup E_2,\ E_1 \cap E_2 = \varnothing$,

$$\iint\limits_{E_1 \cup E_2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{E_2} f(x,y)\,dxdy$$

4) Положительность

$$f \ge 0 \ \Rightarrow \ \iint\limits_E f(x,y)\,dxdy \ge 0$$

4) Сведение двойного интеграла к повторному

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$

$$E = \left\{(x,y) : a \le x \le y, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\right\}$$

5) Замена переменных в двойном интеграле

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(x,y) \end{cases} \quad \iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{E_1} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left|J(u,v)\right| dudv,$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad a)\ \begin{cases} x = au \\ y = bv \end{cases} \quad J = ab \qquad b)\ \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad J = r$$

Сведите двойной интеграл к повторному. Если указана подынтегральная функция, вычислите интеграл:

1) $\iint\limits_{E:\,0\le x,y\le 1} xydxdy=\dfrac{1}{4}$. 2) $\iint\limits_{E:\,x,y\ge 0,\ x+y\le 1} ydxdy=\dfrac{1}{6}$.

3) $\iint\limits_{E} xdxdy,\ E:-$ параллелограмм с вершинами $(0,0),\,(1,0),\,(2,1),\,(1,1)$.

4) $\iint\limits_{E} ydxdy,\ E:-$ верхний единичный полукруг.

5) 3921. $\iint\limits_{E} f(x,y)dxdy,\ E:-$ параболический сегмент, ограниченный линиями $y=x^2,\ y=1$.

6) 3922. $\iint\limits_{E} f(x,y)dxdy,\ E:-$ круговое полукольцо $1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0$.

Измените порядок интегрирований:

7) 3925. $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dy$.

8) 3927. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$.

Вычислите интегралы:

9) 3934. $\iint\limits_{E} |xy|dxdy$, если E — круг радиуса a с центром в начале координат.

10) 3936. $\iint\limits_{E} y^2dxdy$, если E ограничено осью абсцисс и первой аркой циклоиды

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$.

Вычислите интегралы:

11) $\iint\limits_{E:\,x,y\ge 0,\ 2x+3y\le 6} (5x+7y)dxdy$.

12) $\iint\limits_{E} (7x-y)dxdy,\ E:0\le x+y\le 3,\ 0\le 3x-y\le 4$.

13) 3954. $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

14) 3967. $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}dxdy$.

15) $\iint\limits_{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1} \left(2x^2+5y^2\right)dxdy$.

16) 3969. $\iint\limits_E (x+y)dxdy$, где E ограничено линиями $y^2=2x,\ x+y=4,\ x+y=12$.

Вычислите площади фигур, ограниченных следующими линиями:

17) 3986. $(x-y)^2+y^2=a^2 \quad (a>0)$.

18) 3988. $\left(x^3+y^3\right)^2=x^2+y^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ (перейти к полярным координатам).

19) 3996. $x+y=a, x+y=b, y=\alpha x, y=\beta x \ \left(0<a<b, o<\alpha<\beta\right)$.

20) 3999 б). $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=4;\ \frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ 8\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

Ответы: 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{1}{6}$, 3) 1, 4) $\frac{2}{3}$, 9) $\frac{a^4}{2}$, 10) $\frac{35\pi a^4}{12}$, 11) 29, 12) $\frac{33}{2}$, 13) $\frac{2\pi a^3}{3}$, 14) $\frac{2}{3}\pi ab$, 15) $\frac{159}{2}\pi$, 16) $\frac{8156}{15}$, 17) πa^2, 18) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, 19) $\frac{(\beta-\alpha)\left(b^2-a^2\right)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}$, 20) $\frac{189}{16}ab\left(\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{4}+\frac{6}{25}\right)$.

Домашнее задание.

В двойном интеграле $\iint\limits_E F(x,y)dxdy$ расставьте пределы интегрирования в том и другом порядке для указанных множеств E:

3916. E — треугольник с вершинами $(0,0),(1,0),(1,1)$.

3917. E — треугольник с вершинами $(0,0),(2,1),(-2,1)$.

3918. E — трапеция с вершинами $(0,0),(1,0),(1,2),(0,1)$.

3920. E — круг $x^2+y^2\le y$.

Измените порядок интегрирования в следующих интегралах:

3924. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy$.

3926. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$.

3929. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$.

Вычислите следующие двойные интегралы:

3932. $\iint\limits_{E} xy^2\,dxdy$, если множество E ограничено параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

3933. $\iint\limits_{E} \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\,dxdy$, если множество E ограничено кратчайшей дугой окружности с центром (a,a) радиуса a, касающейся осей координат, и осями координат.

3935. $\iint\limits_{E} (x^2 + y^2)\,dxdy$, если множество E — параллелограмм со сторонами $y = x,\ y = x + a,\ y = a,\ y = 3a\ (a > 0)$.

В двойном интеграле $\iint\limits_{E} F(x,y)\,dxdy$ перейдите к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, расставьте пределы интегрирования в том и другом порядке, если:

3937. E — круг $x^2 + y^2 \le a^2$.

3938. E — круг $x^2 + y^2 \le 2x$.

3940. E — треугольник $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x$.

Вычислите следующие двойные интегралы:

3965. $\iint\limits_{E} (x + y)\,dxdy$, E — круг $x^2 + y^2 = x + y$.

3966. $\iint\limits_{E:|x|+|y|\le 1} (|x| + |y|)\,dxdy$.

Найдите площади, ограниченные следующими кривыми:

3985. $y^2 = 2px + p^2,\ y^2 = -2qx + q^2 \ \ (p, q > 0)$.

3988. $\left(x^3 + y^3\right)^2 = x^2 + y^2,\ x, y \geq 0$.

3997. Произведя надлежащую замену переменных, найдите площади, ограниченные следующими кривыми: $xy = a^2,\ \ xy = 2a^2;\ y = x,\ y = 2x$.

Ответы.

3932 $p^5/21$, 3933 $\left(2\sqrt{2} - 8/3\right)a\sqrt{a}$, 3935 $14a^4$;

3965 $\pi/2$, 3966 $4/3$, 3985 $\frac{2}{3}pq\sqrt{pq}$, 3988 $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\pi}{4}\right)$, 3997 $\frac{a^2}{2}\ln 2$.