

## Геометрические приложения определенного интеграла

### Вычисление площадей

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в прямоугольных координатах.

2398.  $y = x^2, x + y = 2$ . ОТВЕТ:  $\frac{9}{2}$

2406.  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$  ( $A > 0, AC - B^2 > 0$ ). ОТВЕТ:  $\frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}$

2407.  $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$  (циссоида),  $x = 2a$ . ОТВЕТ:  $3\pi a^2$

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными

2414.  $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3$ . ОТВЕТ:  $\frac{8}{15}$

Найдите площади фигур, ограниченных кривыми, заданными в полярных координатах.

2419.  $r = a(1 + \cos \varphi)$  (кардиоида). ОТВЕТ:  $\frac{3\pi a^2}{2}$

2422а).  $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) (эллипс). ОТВЕТ:  $\frac{\pi p^2}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}$

2427.  $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ . ОТВЕТ:  $\pi a^2 \sqrt{2}$

### Вычисление длин дуг

2431.  $y = x^{3/2}, 0 \leq x \leq 4$ . ОТВЕТ:  $\frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)$

2437.  $y = \ln \cos x$  ( $0 \leq x \leq a < \pi/2$ ). ОТВЕТ:  $\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$

2443.  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ . ОТВЕТ:  $8a$

### Вычисление объемов

2456. Найдите объем чердака, основание которого есть прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ ,

верхнее ребро равно  $c$ , а высота равна  $h$ . ОТВЕТ:  $\frac{bh}{6}(2a + c)$

2462. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, z = 0$ .

ОТВЕТ:  $\frac{2}{3}abc$

Найдите объемы тел, ограниченных поверхностями, полученными при вращении отрезками следующих линий:

2473.  $y = 2x - x^2, y = 0$ : а) вокруг оси  $Ox$ ; б) вокруг оси  $Oy$ . ОТВЕТ:  $\frac{16}{15}\pi, \frac{8}{3}\pi$ .

2480.  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, y = 0$ : а) вокруг оси  $Ox$ ; б) вокруг оси  $Oy$ ; вокруг прямой  $y = 2a$ . ОТВЕТ:  $5\pi^2 a^3; 6\pi^3 a^3; 7\pi^2 a^3$

2483.2 а). Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, заданной в полярных координатах:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2): \text{ а) вокруг оси } Ox; \text{ б) вокруг оси } Oy;$$

ОТВЕТ:  $\frac{\pi a^3}{4} \left( \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{2}{3} \right); \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$

#### Вычисление площадей поверхностей вращения

Найдите площади поверхностей, образованных вращением следующих линий:

2490.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b \leq a)$ : а) вокруг оси  $Ox$ ; б) вокруг оси  $Oy$ . ОТВЕТ:

$$2\pi b^2 + 2\pi ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}; 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon} \ln \left( \frac{a}{b} (1 + \varepsilon) \right)$$

2492.  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ : вокруг оси  $Ox$ . ОТВЕТ:  $\frac{12}{5}\pi a^2$

#### Домашнее задание

2397, 2404, 2413, 2418, 2426;

2440, 2444

2457, 2464, 2477, 2482.1, 2483.1;

2489, 2491