Числовые ряды

Найдите сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\frac{11}{96}$,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+4)}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}\right)=\frac{11}{96}.$$

3. 2548. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=3.$

Действительно,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k},$$

$$2S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k},$$

$$S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}\underset{n\to\infty}{\to}1+2-0=3.$$

4. 2551. $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\frac{-q^2+q\cos\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\frac{q\sin\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1}$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(qe^{i\alpha}\right)^k = qe^{i\alpha}\frac{\left(qe^{i\alpha}\right)^n-1}{qe^{i\alpha}-1} = qe^{i\alpha}\frac{\left(\left(qe^{i\alpha}\right)^n-1\right)\left(qe^{-i\alpha}-1\right)}{\left(qe^{i\alpha}-1\right)\left(qe^{-i\alpha}-1\right)} =$$

$$= \frac{q^{n+2}e^{in\alpha}-q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}-q^2+qe^{i\alpha}}{q^2-2q\cos\alpha+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k\cos k\alpha = \frac{q^{n+2}\cos n\alpha - q^{n+1}\cos(n+1)\alpha - q^2 + q\cos\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1} \to \frac{-q^2+q\cos\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} q^k\sin k\alpha = \frac{q^{n+2}\sin n\alpha - q^{n+1}\sin(n+1)\alpha + q\sin\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1} \to \frac{q\sin\alpha}{q^2-2q\cos\alpha+1}.$$

Пользуясь критерием Коши, исследуйте сходимость рядов:

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(x^n\right)}{n^2}$.

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\cos\left(x^k\right)}{k^2}\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

ряд сходится.

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{n}{\sqrt{2n(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}\ne 0,$$

ряд расходится.

Исследуйте сходимость положительных рядов

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)^3}{n^3}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{3} < 1, \text{ ряд сходится.}$$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}}n^n=e\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

нарушено необходимое условие сходимости, ряд расходится.

9. 2604. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\frac{1}{n^q}$.

Формула Валлиса $\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{2n+1}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{\pi}{2}$,

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{\pi}{2}(2n+1),$$

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{A}{\sqrt{n}}.$$

$a_n\underset{n\to\infty}{\sim}A^p\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+q}}$, ряд сходится, если $\frac{p}{2}+q>1$.

Установите сходимость и вычислите суммы рядов:

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2^n}=\frac{7}{9}$.

Ранее мы установили сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}$ и вычислили его сумму. Таким образом, исследуемый ряд абсолютно сходится, обозначим его сумму через S.

$$3S=2S+S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2^{n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{2^n}=$$

$$=3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{2^n}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3},\ S=\frac{7}{9}.$$

11. 2662 а) $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2$.

Действительно,

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots$$
$$\frac{1}{2}\ln 2 = \quad \frac{1}{2} - \quad \frac{1}{4} + \quad \frac{1}{6} - \cdots$$
$$\frac{3}{2}\ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

12. 2662 б) $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\ln 2.$

Действительно, воспользуемся формулой для сумм гармонического ряда:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln + C + \gamma_n,\ C = 0.577\ldots \text{- постоянная Эйлера, } \gamma_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) =$$
$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) =$$
$$= \left(\ln(2n-1) + C + \gamma_{2n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(n-1) + C + \gamma_{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 2n + C + \gamma_{2n}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln\frac{(2n-1)^2}{2n(n-1)} + 2\gamma_{2n-1} - \gamma_{n-1} - \gamma_{2n}\right) \to \frac{1}{2}\ln 2.$$

или

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Исследуйте сходимость знакопеременных рядов

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{(n+1)^{\alpha}},\ \alpha = 1,2,3.$

$\alpha=1$: $\dfrac{n+5}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}1$, нарушено необходимое условие сходимость, ряд расходится;

$\alpha=3$: $\left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+5}{(n+1)^3}\right|=\dfrac{n+5}{(n+1)^3}\underset{n\to\infty}{\sim}\dfrac{1}{n^2}$ ряд абсолютно сходится;

$\alpha=2$: ряд не обладает абсолютной сходимостью;

$\dfrac{n+5}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{4}{(n+1)^3}$, исследуемый ряд — линейная комбинация сходящихся рядов

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n+1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(n+1)^2}$; ряд условно сходится.

14. 2667.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{100}n}{n}\sin\frac{\pi n}{4}$$

$\dfrac{\ln^{100}n}{n}>\dfrac{1}{n}$, ряд не обладает абсолютной сходимостью.

Применим признак Дирихле:

$$a_n=\sin\frac{\pi n}{4}:\ \frac{1}{\sqrt{2}},1,\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-1,-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},1,\ldots$$

$$A_n:\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}+1,\sqrt{2}+1,\sqrt{2}+1,\frac{1}{\sqrt{2}}+1,\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}+1,\ldots$$

$$0\le A_n\le\sqrt{2}+1;$$

$$b_n=\frac{\ln^{100}n}{n}\underset{n\to\infty}{\searrow}0\quad\left(f(x)=\frac{\ln^{100}x}{x},\ f'(x)=\frac{100x\frac{1}{x}\ln^{99}x-\ln^{100}x}{x^2}=\frac{\ln^{99}x(100-\ln x)}{x^2}<0\text{ при }x>e^{100}\right),$$

ряд условно сходится.

15. 2689. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sim \frac{A}{n^{1/2}}.$$

Ряд абсолютно сходится, если $p > 2$.

Ряд расходится с нарушением необходимого условия, если $p < 0$.

Пусть $0 < p \le 2$. Выполнено необходимое условие сходимости,
ряд является знакочередующимся. Для применения признака Лейбница
осталось проверить монотонность:

$$\frac{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p}{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p < 1.$$

Ряд условно сходится, если $0 < p \le 2$.