

Задача 1. 3628. Найдите точки экстремума функции

$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

Запишем дифференциал исследуемой функции:

$$dz = ydx + xdy - \frac{50}{x^2}dx - \frac{20}{y^2}dy.$$

Стационарную точку ищем из системы

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0, \\ x - \frac{20}{y^2} = 0, \end{cases} \begin{cases} x^2y = 50, \\ xy^2 = 20, \end{cases} \quad \frac{x}{y} = \frac{5}{2}, \quad x = 5, y = 2.$$

В найденной стационарной точке вычислим второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2z &= 2dxdy + \frac{100}{x^3}dx^2 + \frac{40}{y^3}dy^2, \\ d^2z &= \frac{4}{5}dx^2 + 2dxdy + 5dy^2 = \frac{1}{5}(4dx^2 + 10dxdy + 25dy^2) = \\ &= \frac{1}{5}(3dx^2 + (dx + 5dy)^2). \end{aligned}$$

d^2z — положительно определенная квадратичная форма, функция z имеет в точке $(5, 2)$ строгий минимум.

Задача 2. Найдите точки условного экстремума функции $z = xy$ при условии $3x + 2y = 12$.

Составим функцию Лагранжа

$$L = xy + \lambda(3x + 2y).$$

Ее частные производные даются формулами

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 3\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda.$$

Для отыскания стационарной точки получаем систему

$$\begin{cases} y + 3\lambda = 0 \\ x + 2\lambda = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x = 2, y = 3, \lambda = -1$.

Мы изучаем поведение функции $z = xy$ на прямой $3x + 2y = 12$. В точках $(4, 0), (0, 3)$ функция принимает нулевые значения; в остальных точках отрезка с указанными концами функция строго положительна. В некоторой точке отрезка функция должна принять свое наибольшее значение. Эта точка неизбежно оказывается точкой условного максимума. Поскольку наши вычисления обнаружили только одну точку, претендующую на роль экстремальной, то мы приходим к заключению, что $(2, 3)$ — точка условного максимума.

Задача решена без привлечения второго дифференциала.

Проведем дополнительно и вычисление второго дифференциала. При $\lambda = -1$ функция Лагранжа имеет вид

$$L = xy - (3x + 2y).$$

Запишем дифференциалы:

$$dL = ydx + xdy - (3dx + 2dy), \quad d^2L = 2dxdy.$$

d^2L должен рассматриваться для dx, dy , удовлетворяющих уравнению

$$3dx + 2dy = 0, \quad dy = -\frac{3}{2}dx,$$

так что d^2L оказывается квадратичной формой одной переменной dx :

$$d^2L = -3dx^2.$$

Квадратичная форма является отрицательно определенной.

Ответ: максимум $z = 6$ при $x = 2, y = 3$.

Задача 3. 3663. Найдите точки экстремума функции

$$u = xyz \text{ при условиях } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$$

Составим функцию Лагранжа

$$F = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \mu(x + y + z).$$

Для отыскания стационарных точек получаем систему

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0, \\ zx + 2\lambda y + \mu = 0, \\ xy + 2\lambda z + \mu = 0, \end{cases}$$

имеющую шесть решений:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Для точки $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\mu = \frac{1}{6}$ построим второй дифференциал:

$$F = xyz + \frac{1}{2\sqrt{6}}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{6}(x + y + z)$$

$$dF = yzdx + zxdy + xydz + \frac{1}{\sqrt{6}}(xdx + ydy + zdz) + \frac{1}{6}(dx + dy + dz)$$

$$d^2F = 2xdydz + 2ydzdx + 2zdx dy + \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$d^2F = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dydz + 2dzdx - 4dxdy)$$

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases} \begin{cases} dx + dy - 2dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{cases} \begin{cases} dx + dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$d^2F = \sqrt{6}dx^2$$

Получилась положительно определенная форма одной переменной. Функция u имеет в точках

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\text{устанавливается, что в точках } \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

наблюдаются условные максимумы.

В этой задаче тоже можно избежать вычислений второго дифференциала. Уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$$

определяют в пространстве окружность, на которой функция достигает своих наименьшего и наибольшего значений. В соответствующих точках функция имеет условные экстремумы. Первая часть наших вычислений обнаружила шесть точек, в которых функция может принимать

наименьшее и наибольшее значения. Первые три точки дают значение $u = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ (наименьшее),

а последние три — значение $u = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ (наибольшее).

Задача 4. Найдите расстояние между прямыми

$$\frac{x-6}{4} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-1}, \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-2},$$

т.е. наименьшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой прямой, а вторая — на второй.

Запишем параметрические уравнения прямых:

$$\begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = 2 - t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = -2s \end{cases}$$

Квадрат расстояния между точками, отвечающими значениям t, s параметров, дается формулой

$$\rho^2 = (3 + 4t - 2s)^2 + (t + s)^2 + (3 - t + 2s)^2.$$

Найдем стационарную точку функции ρ^2

$$\begin{cases} 4(3 + 4t - 2s) + (t + s) - (3 - t + 2s) = 0 \\ -2(3 + 4t - 2s) + (t + s) + 2(3 - t + 2s) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 18t - 9s + 9 = 0 \\ -9t + 9s = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2t - s + 1 = 0 \\ -t + s = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} t = -1 \\ s = -1 \end{cases}$$

Функция ρ^2 имеет единственную стационарную точку $s = t = -1$ и принимает в этой точке значение

$$\rho^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9, \quad \rho = 3.$$

Докажем, что $\rho = 3$ — наименьшее из расстояний между точками рассматриваемых прямых.

Значению $t = -1$ отвечает точка $A(2, 3, 4)$ первой прямой, а значению $s = -1$ — точка $B(1, 1, 2)$ второй прямой. Вектор $\overrightarrow{BA}(1, 2, 2)$ имеет длину 3. Этот вектор перпендикулярен направляющим векторам $(4, -1, -1)$ и $(2, 1, -2)$ прямых. Покажем, что для любых точек C, D рассматриваемых прямых вектор $\overrightarrow{CD}$ имеет большую длину. Действительно,

$$C(6+4t, 2-t, 3-t), D(3+2s, 2+s, -2s);$$

$$\overrightarrow{CD}(-3-4t+2s, t+s, -3+t-2s)$$

$$|\overrightarrow{CD}|^2 = (-3-4t+2s)^2 + (t+s)^2 + (-3+t-2s)^2 =$$

$$(-1+(-2-4t+2s))^2 + (-2+(2+t+s))^2 + (-2+(-1+t-2s))^2 =$$

$$= 1^2 - 2(-2-4t+2s) + (-2-4t+2s)^2 + 2^2 - 4(2+t+s) + (2+t+s)^2 + 2^2 - 4(-1+t-2s) + (-1+t-2s)^2 =$$

$$= 9 + (-2-4t+2s)^2 + (2+t+s)^2 + (-1+t-2s)^2 \geq 9.$$

Задача 5. Найдите треугольник периметра 8, который вращением вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Ответ: тело наибольшего объема $\frac{16\pi}{3}$ получается при вращении равнобедренного треугольника с основанием 2 и боковыми сторонами 3 вокруг основания.

Пусть $x, y, z > 0$ — длины сторон треугольника, $x + y + z = 8, z = 8 - x - y$. Возможность построения треугольника со сторонами x, y, z обеспечивается неравенствами

$$x + y > z, y + z > x, z + x > y, \text{ т.е. } x + y > 4, x < 4, y < 4.$$

Будем вращать треугольник вокруг стороны z . Для вычисления площади треугольника применим формулу Герона:

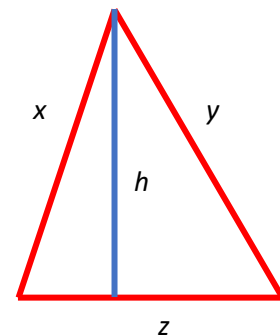
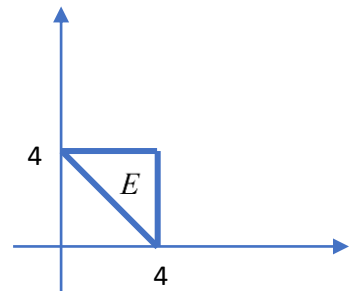
$$S = \sqrt{4(4-x)(4-y)(x+y-4)}.$$

Высота треугольника равна

$$h = \frac{2S}{z} = \frac{4\sqrt{(4-x)(4-y)(x+y-4)}}{8-x-y},$$

а объем тела вращения

$$V = \frac{\pi}{3} zh^2 = \frac{16\pi}{3} \frac{(4-x)(4-y)(x+y-4)}{8-x-y}.$$



Построенную функцию V мы рассматриваем на треугольнике, изображенном на первом рисунке. Можно доопределить функцию на замкнутый треугольник E . При этом мы видим, что на контуре треугольника функция V обращается в нуль, а во внутренних точках она строго положительна. Непрерывная на компакте

E функция V достигает своего наибольшего значения в некоторой внутренней точке множества E . Эта точка является точкой максимума и, следовательно стационарной точкой.

Для отыскания стационарных точек запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{-(4-y)(x+y-4)+(4-x)(4-y)}{8-x-y} + \frac{(4-x)(4-y)(x+y-4)}{(8-x-y)^2} = 0, \\ \frac{-(4-x)(x+y-4)+(4-x)(4-y)}{8-x-y} + \frac{(4-x)(4-y)(x+y-4)}{(8-x-y)^2} = 0, \end{cases}$$

Из которой следует, что $x = y$.

Заменяя в первом уравнении y на x , последовательно получим

$$\begin{aligned} \frac{-(4-x)(2x-4)+(4-x)^2}{8-2x} + \frac{(4-x)^2(2x-4)}{(8-2x)^2} &= 0, \\ \frac{-(2x-4)+(4-x)}{2} + \frac{(x-2)}{2} &= 0, \\ -(2x-4)+(4-x)+(x-2) &= 0, \\ -2x+6=0, x=3, y=3, z=2. \end{aligned}$$

Функция имеет единственную стационарную точку $(3, 3, 2)$, так что именно эта точка и доставляет наибольшее значение нашей функции:

$$V = \frac{16\pi}{3} \frac{1 \cdot 1 \cdot 2}{2} = \frac{16\pi}{3}.$$