Занятия 9 – 10

Функции нескольких переменных

Определите и изобразите области существования следующих функций:

3137. $u = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{y^2-1}$.

3141. $u\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.

Постройте линии уровня следующих функций:

3153. $z = x^2 - y^2$.

3159. а) $z = |x| + |y| - |x+y|$; б) $z = \min\{x, y\}$.

Найдите поверхности уровня следующих функций:

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2$

3169. $u = (x+y)^2 + z^2$

Предел и непрерывность

3184 а) Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$ и $\lim\limits_{y\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$.

3185. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

3196. Найдите точки разрыва функции $u = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

3202 а) Покажите, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

Непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности (при фиксированном значении другой переменной), но не является непрерывной по совокупности этих переменных.

Дифференцирование явных функций

Найдите частные производные первого и второго порядков от следующих функций:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

3222. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

Найдите дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций(x, y, z — независимые переменные):

3236. $u = \dfrac{x}{y}$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$

3242. Найдите $df\left(1,1,1\right)$ и $d^2 f\left(1,1,1\right)$, если $f\left(x, y, z\right) = \sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$.

3263. Найдите $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n}$, если $u = \dfrac{x+y}{x-y}$

3284. Найдите частные производные первого и второго порядков от функции $u = f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$.

3297. Найдите дифференциалы первого и второго порядков от функции $u = f\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)$.

3281 б) Найдите $\Delta = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $= = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

3311. Докажите, что функция $u = \dfrac{1}{r}$, где $r = \sqrt{\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 + \left(z-c\right)^2}$, удовлетворяет при $r \neq 0$ уравнению Лапласа $\Delta u \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

3328. Предполагая, что функции φ, ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверьте равенство

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ если } u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

4. Дифференцирование неявных функций

3372. Найдите y', y'' для функции y , определяемой уравнением

$$\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

3377. Докажите, что если

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0,$$

То при $xy>0$ имеет место равенство

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}=0$$

3385. Для функции $z=z(x,y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, если $x+y+z=e^z$

3395. Найдите $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, если $F\left(x+y+z,x^2+y^2+z^2\right)=0$

3405. Найдите du,dv,d^2u,d^2v при $x=1,y=1,u=0,v=\frac{\pi}{4}$, если

$$e^{\frac{u}{x}}\cos\frac{v}{y}=\frac{x}{\sqrt{2}},e^{\frac{u}{x}}\sin\frac{v}{y}=\frac{y}{\sqrt{2}}$$

Домашнее задание

3140, 3154, 3159 в), 3168;

3184 в), 3186, 3195;

3217, 3224, 3238, 3260, 3272, 3283, 3295, 3296, 3307, 3323, 3327, 3329;

3375, 3380, 3381, 3389, 3396, 3408 б)