Несобственные интегралы

1) 2337

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_{-1}^{1}=\pi$$

2) 2339

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(y^2+\frac{3}{4}\right)^2}=$$

$$=\left[y=\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]=\frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left(u^2+1\right)^2}=\left[u=\frac{1}{v}\right]=\frac{8}{3\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{v^2dv}{\left(v^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{3}}\left(-\frac{v}{2\left(v^2+1\right)}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{v^2+1}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

3) 2344

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{x^2}{2\left(1+x^2\right)}\ln x\Bigg|_{0}^{A}-\frac{1}{2}\int_{0}^{A}\frac{xdx}{1+x^2}\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{A^2}{2\left(1+A^2\right)}\ln A-\frac{1}{4}\ln\left(1+A^2\right)\right)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{A^2}{1+A^2}\ln A^2-\ln\left(1+A^2\right)\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\left(1-\frac{1}{1+A^2}\right)\ln A^2-\ln\left(1+A^2\right)\right)=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{4}\left(\ln\frac{A^2}{1+A^2}-\frac{\ln A^2}{1+A^2}\right)=0$$

или

$\int_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ сходится,

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\left[x=\frac{1}{y}\right]=\int_{0}^{+\infty}\frac{y\ln\frac{1}{y}}{\left(1+y^2\right)^2}dy=I;$$

$$I=0$$

4) 2346

$a > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \left.\frac{-ae^{-ax}\cos bx + be^{-ax}\sin bx}{a^2+b^2}\right|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

или

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\cos bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx =$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}e^{-ax}\sin bx\Big|_0^{+\infty} - \frac{b^2}{a^2}\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx = \frac{1}{a} - \frac{b^2}{a^2}I,$$

$$a^2 I = a - b^2 I,\ \ I = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

5) 2349

$ac - b^2 > 0,\ a > 0,\ n -$ натуральное число,

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(ax^2+2bx+c\right)^n} = \frac{1}{a^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)^n} =$$

$$= \frac{1}{a^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)^n} = \frac{1}{a^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{\left(y^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)^n} =$$

$$= \left[y = \sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}}z\right] = \frac{1}{a^n}\frac{1}{\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{2n-1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz}{\left(z^2+1\right)^n} = \left[z = \operatorname{tg} t\right] =$$

$$= \frac{a^{n-1}}{\left(ac-b^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n-2} t dt = \frac{a^{n-1}}{\left(ac-b^2\right)^{\frac{2n-1}{2}}}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\pi$$

6) 2352 $I_n = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}$

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1}x}=\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}x dx}{\operatorname{ch}^{n+2}x}=\left[y=\operatorname{sh}x\right]=\int_0^{+\infty}\frac{dy}{\left(y^2+1\right)^{\frac{n+2}{2}}}=\left[y=\operatorname{tg}t\right]=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\cos^n t dt=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2},\ n\text{ четно},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!},\ n\text{ нечетно}\end{cases}$$

7) 2392

$$v.p.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}=v.p.\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\lim_{\alpha,\beta\to+0}\left(\int_0^{1-\alpha}+\int_{1+\alpha}^{2-\beta}+\int_{2+\beta}^{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to+0}\left(\left(\ln(2-x)-\ln(1-x)\right)\Big|_0^{1-\alpha}+\left(\ln(2-x)-\ln(x-1)\right)\Big|_{1+\alpha}^{2-\beta}+\left(\ln(x-2)-\ln(x-1)\right)\Big|_{2+\beta}^{+\infty}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to+0}\left(\left(\ln(1+\alpha)-\ln(a)-\ln 2\right)+\left(\ln(\beta)-\ln(1-\beta)-\ln(1-\alpha)+\ln(\alpha)\right)+\left(-\ln(\beta)+\ln(1+\beta)\right)\right)=$$

$$=\lim_{\alpha,\beta\to+0}\left(\ln(1+\alpha)-\ln 2-\ln(1-\beta)-\ln(1-\alpha)+\ln(1+\beta)\right)=-\ln 2$$

8) 2359

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}},\ \frac{1}{x\sqrt[3]{x^2+1}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^{5/3}},\text{ интеграл сходится}$$

9) 2360

$$\int_0^2\frac{dx}{\ln x},\ \ln x\underset{x\to1}{\sim}(x-1),\text{ интеграл расходится}$$

10) 2361

$$\int_0^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx$$

$$\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx,\ x^{p-1}e^{-x}\underset{x\to+0}{\sim}x^{p-1},\text{ интеграл сходится,если } p>0,$$

$$\int_1^{+\infty}x^{p-1}e^{-x}dx,\ x^{p-1}e^{-x}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right),\text{ интеграл сходится}$$

Ответ: интеграл сходится, если $p>0$.

11) $\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$.

Рассмотрим остаток интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$

$$\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x},$$

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ расходится;}$$

$$\int\limits_{\pi}^{A} \frac{\cos 2x}{x} dx = \frac{\sin 2x}{2x}\Bigg|_{\pi}^{A} + \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{A} \frac{\sin 2x}{x^2} dx \underset{A\to+\infty}{\to} \frac{1}{2}\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx \text{ сходится}$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx,\ \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ расходятся}$$

или

$$\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x}\ \textit{расходится},\ \int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty;$$

$$\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{x} \geq \frac{\pi}{\pi k} = \frac{1}{k},$$

$$\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{|\sin x|\,dx}{x} \geq \int\limits_{\pi k+\pi/6}^{\pi(k+1)-\pi/6} \frac{|\sin x|\,dx}{x} \geq \frac{1}{2}\int\limits_{\pi k+\pi/6}^{\pi(k+1)-\pi/6} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{2}\frac{2\pi/3}{\pi(k+1)} = \frac{1}{3(k+1)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{6k} \geq \frac{1}{6}\int\limits_{\pi k}^{\pi(k+1)} \frac{dx}{x};$$

$$\int\limits_{\pi}^{\pi n} \frac{|\sin x|\,dx}{x} \geq \frac{1}{6}\int\limits_{\pi}^{\pi n} \frac{dx}{x} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$$

Ответ: интеграл расходится.

12) Исследуйте интегралы на абсолютную и условную сходимость:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^{\alpha}} \sin x dx,\ \alpha = 1, 2, 3$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x}{x+100} \sin x dx,$$

$$\int\limits_{2\pi k+\pi/4}^{2\pi k+3\pi/4} \frac{x}{x+100} \sin x dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{2\pi k+\pi/4}^{2\pi k+3\pi/4} \frac{x}{x+100} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\pi k}{2\pi k+101}\frac{\pi}{2} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

интеграл расходится.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^3} \sin x dx,$$

$$\left| \frac{x}{(x+100)^3} \sin x \right| \le \frac{x}{(x+100)^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2};$$

$\int_0^{+\infty} \left| \frac{x}{(x+100)^3} \sin x \right| dx$ сходится, $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^3} \sin x dx$ абсолютно сходится.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} \sin x dx,$$

$F(A) = \int_0^A \sin x dx = 1 - \cos A$ – ограниченная функция,

$\frac{x}{(x+100)^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0,\ g(x) = \frac{x}{(x+100)^2},\ g'(x) = \frac{x+100-2x}{(x+100)^3} = \frac{100-x}{(x+100)^3} < 0$ при $x > 100$,

интеграл сходится по признаку Дирихле.

Для исследования абсолютной сходимости заметим еще раз, что

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{x}{(x+100)^2} |\sin x| \ge \frac{x}{(x+100)^2} \sin^2 x = \frac{x}{(x+100)^2} \frac{1-\cos 2x}{x}.$$

Интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} dx$ расходится, а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} \cos 2x dx$ по признаку Дирихле

сходится, поэтому расходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} \sin^2 x dx$, а вместе с ним и

$\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} |\sin x| dx$. Итак, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+100)^2} \sin x dx$ сходится лишь условно.

13) $\int_0^{+\infty} \sin x dx$.

Частичный интеграл $\int_0^A \sin x dx = -\cos x\Big|_0^A = 1 - \cos A$ не имеет предела при $A \to +\infty$.

Несобственный интеграл расходится.

14) $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$. Заменой $y = x^2$ интеграл преобразуется в $\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(y\right)}{\sqrt{y}}dy$. Интегралы $\int\limits_0^{+\infty} \sin\left(x^2\right)dx$ и $\frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\left(y\right)}{\sqrt{y}}dy$ ведут себя одинаково в плане сходимости. Интегралы сходятся условно.