Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}$$

Найдите $\frac{dy}{dx}, \ \frac{d^2y}{dx^2}, \ \frac{d^3y}{dx^3}$

1141 $x = a\cos t, \ y = a\sin t$

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t, \ \frac{dy}{dt} = a\cos t,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 t}\frac{1}{a\sin t} = -\frac{1}{a\sin^3 t}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\cos t}{a\sin^4 t}\left(-\frac{1}{a\sin t}\right) = -\frac{3\cos t}{a^2\sin^5 t}$$

1142 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}, \ \frac{dy}{dt} = a\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{2a\sin^5\frac{t}{2}}\frac{1}{2a\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}$$

1146 $x^2 + y^2 = 25$**. Чему равны** y', y'', y''' **в точке** $M(3, 4)$ **?**

$$xdx + ydy = 0,\ 3dx + 4dy = 0;\ dy = -\frac{3}{4}dx$$

$$dx^2 + dy^2 + yd^2y = 0,\ dx^2 + dy^2 + 4d^2y = 0,\ d^2y = -\frac{1}{4}\left(dx^2 + dy^2\right) = -\frac{25}{64}dx^2$$

$$3dyd^2y + yd^3y = 0,\ \ 3dyd^2y + 4d^3y = 0,$$

$$d^3y = -\frac{3}{4}dyd^2y = -\frac{3}{4}\frac{3}{4}dx\frac{25}{64}dx^2 = -\frac{225}{1024}dx^3$$

Уравнение касательной

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

1055 Написать уравнения касательной к кривой

$$y = \left(x+1\right)\sqrt[3]{3-x}$$

в точках $A\left(-1;0\right);\ B\left(2;3\right);\ C\left(3;0\right)$

1070 Докажите, что у астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad \left(a > 0\right)$ **длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.**

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x_0^{-1/3}dx + y_0^{-1/3}dy = 0$$

$$x_0^{-1/3}\left(x - x_0\right) + y_0^{-1/3}\left(y - y_0\right) = 0$$

$$\left(x_1, 0\right):\ x_0^{-1/3}\left(x_1 - x_0\right) + y_0^{-1/3}\left(-y_0\right) = 0$$

$$x_1 = x_0 + x_0^{1/3}y_0^{2/3} = x_0^{1/3}\left(x_0^{2/3} + y_0^{2/3}\right) = a^{2/3}x_0^{1/3}$$

$$y_2 = y_0 + y_0^{1/3}x_0^{2/3} = a^{2/3}y_0^{1/3}$$

$$x_1^2 + y_2^2 = a^{4/3}\left(x_0^{2/3} + y_0^{2/3}\right) = a^{4/3}a^{2/3} = a^2$$

1076 Докажите, что семейства парабол

$$y^2 = 4a\left(a - x\right)\ \left(a > 0\right)$$
$$y^2 = 4b\left(b + x\right)\ \left(b > 0\right)$$

образуют ортогональную сетку.

$$a\left(a - x\right) = b\left(b + x\right),$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b,\ y^2 = 4ab, y = \pm 2\sqrt{ab}$$

$y > 0$

$$y = \sqrt{4a(a-x)},\ y' = -\sqrt{\frac{a}{a-x}}\,|_{x=a-b} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$y = \sqrt{4b(b+x)},\ y' = \sqrt{\frac{b}{b+x}}\,|_{x=a-b} = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

1078 Напишите уравнения касательных к кривой

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^3},\ y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

в точках $t=0,\ t=1,\ t=\infty$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2} =$$

$$= \frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}$$

$$t=0,\ x=y=0, \frac{dy}{dx}=1 \qquad y=x$$

$$t=1,\ x=3/2,\ y=1/2, \frac{dy}{dx} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

$$y-1/2 = 3(x-3/2),\ y=3x-4$$

$$t=\infty,\ x=y=0,\ \frac{dy}{dx}=-1,\ \ y=-x$$

1082 $xy + \ln y = 1 \ \ M(1,1)$

$$ydx + xdy + \frac{dy}{y} = 0,\ dx + 2dy = 0,$$

$$(x-1) + 2(y-1) = 0,\ x + 2y - 3 = 0$$

1143. Найдите производные до третьего порядка от функции, заданной параметрически системой

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t) = \sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t(\cos t + \sin t) = \sqrt{2}e^t \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t(\cos t + \sin t)}{e^t(\cos t - \sin t)} = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos^3\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos^3\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} + 3\frac{\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}e^t \cos^4\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \frac{1}{\sqrt{2}e^t \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} =$$

$$= \frac{-\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{2e^{2t} \cos^5\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\cos t + 2\sin t}{\sqrt{2}e^{2t} \cos^5\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}$$

1073. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

В точке касания равны значения функций и производных:

$$\begin{cases} ax^2 = \ln x \\ 2ax = \frac{1}{x},\ ax^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\ln x = \frac{1}{2},\ x = \sqrt{e},\ a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}$$