Занятия 10 – 11

Формула Тейлора и правило Лопиталя

Формула Тейлора

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$$

I $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right)$

II $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right),$

$\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n-1}\right),$

III $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right),$

IV $(1+x)^\mu=1+\mu x+\cdots+\dfrac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+o\left(x^n\right),$

V $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$

VI $\operatorname{sh} x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n-1}\right)$

VII $\operatorname{ch} x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n}\right)$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+o\left(x^{2n-1}\right)$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right)$$

Правило Лопиталя

Пусть f, g — функции, определенные на (a, b).

1) f, g дифференцируемы во всех точках интервала,

$$\forall x\in(a, b) \quad g'(x)\neq 0.$$

2) $f(x)\underset{x\to b-0}{\to}0,\ g(x)\underset{x\to b-0}{\to}0$ или $f(x)\underset{x\to b-0}{\to}\infty,\ g(x)\underset{x\to b-0}{\to}\infty$

3) $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\underset{x\to b-0}{\to}A$.

Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{x\to b-0}{\to}A.$$

Напишите разложения по целым неотрицательным степеням x до указанного порядка включительно:

1384 $\ln\cos x$ до x^6 $\quad -\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^6}{45}+o\left(x^6\right)$

1386 $\operatorname{tg} x$ до x^7 $\quad x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{17}{315}x^7+o\left(x^7\right)$

Выделите главную часть бесконечно малой при $x \to 0$:

1409 $1-\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \sim \frac{x}{2}$

Выделите главную часть бесконечно малой при $x \to 2$:

$$\alpha(x) = e^{\operatorname{tg}\pi x}\cos 3\pi x - \sqrt{1+\sin 2\pi x} \underset{x\to 2}{\sim} -\frac{7}{2}\pi^2(x-2)^2$$

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{2x}}{x+2} - \frac{\sqrt[3]{x+6}}{2x} - \frac{11}{48}(x-2) \underset{x\to 2}{\sim} -\frac{149}{1152}(x-2)^2$$

Найдите пределы:

1320 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x} = 2$

1325 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} = \frac{1}{6}$

1332 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$

1333 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \frac{1}{6}$

1342 $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$

1351 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x} = 1$

1354 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \frac{1}{2}$

1359 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\frac{e}{2}$

1363 б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{6}}$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{-\frac{1}{3}}$

1365 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}=e^{-\frac{2}{\pi}}$

1399 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}$

1400 $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)=-\frac{1}{4}$

1404 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\frac{1}{2}$

Выделите главную часть бесконечно малой при $x\to 0$:

1407 $\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)\sim\frac{x^7}{30}$

Домашнее задание

1323, 1327, 1330, 1338, 1356, 1363 а,в, 1364, 1382, 1385, 1398, 1405, 1406 в, 1408