

Б.П.Демидович Сборник задач и упражнений по математическому анализу (издание 2002 и позднее)

Занятие 1

Докажите равенства

№ 1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

№2 2. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

№ 7. Докажите, что если $x > -1$, то справедливо неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1),$$

причем равенство имеет место лишь при $x = 0$

Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$

Докажите равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Докажите неравенства:

№ 8 $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ при $n > 1$

№ 9б) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

№10а) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2)$

Решите неравенства

$$|x-4| < 2$$

$$|x-2| > |x+1|$$

$$|x-1| + |x-3| > 5$$

Домашнее задание

№ 3. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

№ 4 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Докажите равенство

$$C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Докажите неравенства:

№ 9а) $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n \quad (n > 1)$

106) $n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geq 3)$

Решите неравенства

№ 23 $|x - 2| \geq 10$

№ 24 $|x| > |x + 1|$

№28 $|x + 1| - |x - 1| < 1$