

Лекция 9 28.10.2025

§ 7. Продолжение решений

1⁰. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (1)$$

f непрерывна и удовлетворяет локально условию Липшица по y в области G . Таким образом, G — область единственности.

Определение.

Мы скажем, что решение $y = \varphi_1(x)$, $x \in \Delta_1$ имеет своим продолжением решение

$y = \varphi_2(x)$, $x \in \Delta_2$, если $\Delta_1 \subset \Delta_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2|_{\Delta_1}$.

Замечание. Можно ограничиться рассмотрением решений, определенных на интервалах, поскольку с промежутка другого типа решение всегда можно распространить на более широкий интервал.

Пусть $y = \varphi_1(x)$, $x \in (a_1, b_1)$ и $y = \varphi_2(x)$, $x \in (a_2, b_2)$ — два решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$y|_{x_0} = y_0. \quad (2)$$

По теореме единственности $\varphi_1 = \varphi_2$ на общей части интервалов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) . Функция

$$\varphi: \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in (a_1, b_1), \\ \varphi_2(x), & x \in (a_2, b_2) \end{cases}$$

является решением задачи Коши и продолжает решения φ_1, φ_2 .

2⁰. Теорема 1.

Задача Коши (1), (2) имеет единственное непродолжимое решение, т.е. решение, которое является продолжением для любого решения.

Доказательство.

Рассмотрим совокупность всевозможных решений задачи Коши. Пусть Δ — объединение всех промежутков, на которых определяются решения. Ясно, что Δ — интервал, $\Delta = (a, b)$.

На (a, b) определим функцию φ . Если $x \in (a, b)$, то все решения, определенные в этой точке имеют общее значение, которое мы и объявим значением функции φ . Функция φ — решение задачи Коши. Оно является продолжением для любого решения.

Дополнение.

Можно доказать, что решение $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ непродолжимо вправо в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:

1) $b = +\infty$, 2) $\varphi(x) \rightarrow \pm\infty$ при $x \rightarrow b-0$, 3) расстояние от $(x, \varphi(x))$ до границы области G бесконечно мало при $x \rightarrow b-0$.

3⁰. Теорема 2.

Пусть K — компакт, лежащий в области G . $y = \varphi(x)$, $x \in (a, b)$ — непродолжимое решение уравнения (1).

Тогда существуют такие числа $x_1, x_2 \in (a, b)$, что при $x < x_1$ и $x > x_2$ точка $(x, \varphi(x))$ лежит вне компакта K .

Доказательство. Установим существование числа x_2 .

Справедливость утверждения теоремы не вызывает сомнений, если $b = +\infty$.
Рассмотрим случай конечного b .

Подберем число $\delta > 0$ так, чтобы компакт

$$K_1 = \{(x, y) \mid \rho((x, y), K) \leq 2\delta\}$$

содержался в области G . Функция f ограничена на K_1 : $|f(x, y)| \leq M$.

Если $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$, то квадрат $|x - \bar{x}| \leq \delta, |y - \bar{y}| \leq \delta$ содержится в K_1 . Положим $\eta = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$

В теореме существования удалось построить решение на отрезке Пеано $[\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta]$.

Число $x_2 = b - \eta$ удовлетворяет условиям теоремы. В самом деле, если $(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \in K$ при некотором $\bar{x} > x_2$, то решение φ окажется определенным по крайней мере на интервале $(\bar{x} - \eta, \bar{x} + \eta)$. Поэтому $\bar{x} + \eta \leq b$, вопреки выбору $\bar{x}$.

4⁰. Теорема 3. (О непродолжимых решениях почти линейного уравнения)

Пусть функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в области $G = (a, b) \times (-\infty, +\infty)$. Для a, b допускаются значения $\pm\infty$. Предположим далее, что выполнено неравенство

$$|f(x, y)| \leq A(x)|y| + B(x),$$

где A, B — непрерывные положительные функции.

Тогда всякое решение дифференциального уравнения (1) продолжается на интервал (a, b) .

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x)$, $x \in (a_1, b_1)$ — непродолжимое решение. Покажем, что $b_1 = b$. Допустим $b_1 < b$. Выберем некоторую точку $x_0 \in (a_1, b_1)$. По теореме о дифференциальном неравенстве функция φ ограничена на $[x_0, b_1)$:

$$\left(|\varphi(x)| \leq |\varphi(x_0)| e^{A_0(x-x_0)} + \frac{B_0}{A_0} (e^{A_0(x-x_0)} - 1), A_0 = \max_{x \in [x_0, b_1]} |A(x)|, B_0 = \max_{x \in [x_0, b_1]} |B(x)| \right)$$

$|\varphi(x)| \leq M$ при $x \in [x_0, b_1)$. По теореме 2 интегральная кривая $y = \varphi(x)$ должна покинуть компакт $[x_0, b_1] \times [-M, M]$, найдется такой $x \in [x_0, b_1]$, что $|\varphi(x)| > M$, вопреки выбору числа M .

Отметим существенность условия теоремы 3.

Пример. Ненулевые решения уравнения $y' = y^2$ не допускают продолжения на $(-\infty, +\infty)$.

Например, функция $y = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ является непродолжимым решением.

§ 8 Гладкость решений

Мы продолжаем рассмотрение дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Каждое решение φ этого уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией. Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема. Тогда равенство

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

влечет существование второй непрерывной производной функции φ :

$$\phi''(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \phi' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то решение имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно:

$$\phi''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right)$$

Если функция f p раз непрерывно дифференцируема, то решение имеет непрерывные производные до $(p+1)$ -го порядка включительно.

§ 9 Непрерывная зависимость решения от начальных условий и параметров

В реальных задачах начальные условия и правая часть дифференциального уравнения оказываются известными лишь в приближенном смысле. Хотелось бы надеяться, что малым изменениям начальных условий и правой части дифференциального уравнения соответствуют малые изменения решения.

Теорема 1 Зависимость решения от параметров

Пусть $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывные функции (трех переменных) в области $G \times (\alpha, \beta)$, $(x_0, y_0) \in G$.

Поставим задачу Коши

$$y' = f(x, y, \mu), \quad (1)$$

$$y|_{x_0} = y_0 \quad (2)$$

Тогда решение $y = \varphi(x, \mu)$ задачи Коши (1), (2) непрерывно зависит от параметра μ :

если для некоторого $\mu_0 \in (\alpha, \beta)$ решение $y = \varphi(x, \mu_0)$ задачи Коши определено на отрезке $[a, b]$ ($x_0 \in (a, b)$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\sigma > 0$, что для μ , удовлетворяющих условию $|\mu - \mu_0| < \sigma$, решение тоже определяется на всем отрезке $[a, b]$ и

$$\forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы означает, в частности, что функция φ является непрерывной функцией двух переменных.

Замечание 2. Наличие непрерывной частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ влечет за собой условие

Липшица по y для любой компактной части K области G и отрезка $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$. Роль

константы Липшица выполняет $L = \max_{(x,y) \in K, \mu \in [\alpha_1, \beta_1]} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \mu) \right|$.

Доказательство теоремы 1.

Мы должны показать, что для μ , близких к μ_0 , решение $y = \varphi(x, \mu)$ определяется на всем $[a, b]$ и его график проходит в ε -коридоре

$$K = \{(x, y) : x \in [a, b], |y - \varphi(x, \mu_0)| \leq \varepsilon\}$$

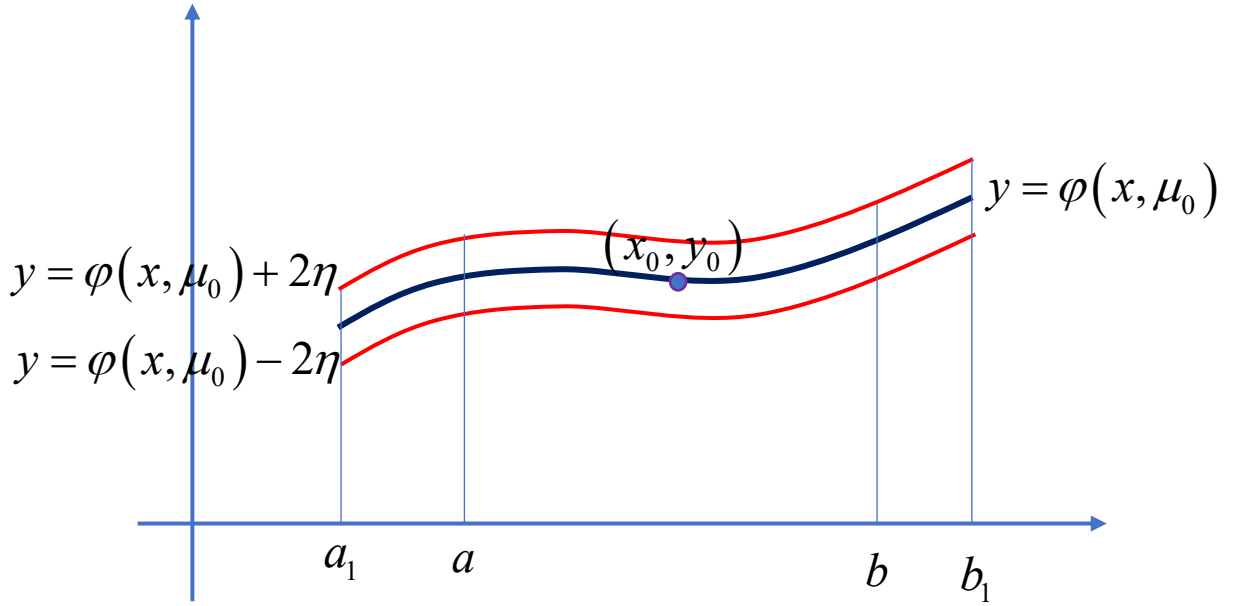
графика решения $y = \varphi(x, \mu_0)$.

Решение φ допускает продолжение с отрезка $[a, b]$ на более широкий отрезок $[a_1, b_1]$, $(a_1, b_1) \supset [a, b]$.

Ограничимся изучением поведения решений на отрезке $[x_0, b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

Подберем такое положительное $\eta < \varepsilon$, что компакт

$$K_1 = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1], |y - \varphi(x, \mu_0)| \leq 2\eta\} \subset G.$$



Подберем еще такой отрезок $[\alpha_1, \beta_1] \subset (\alpha, \beta)$, что $\mu_0 \in (\alpha_1, \beta_1)$. Через L обозначим постоянную Липшица для компакта

$$E = K_1 \times [\alpha_1, \beta_1] \subset G \times (a, \beta).$$

Рассмотрим сужение д.у. (1) на область $G_1 \times (\alpha_1, \beta_1)$ — внутренность компакта E .

Зафиксируем некоторое $\mu \in (\alpha_1, \beta_1)$ и рассмотрим непродолжимое решение

$$y = \varphi(x, \mu), \quad x \in (a_2, b_2) \text{ д.у. (1) на области } G_1 \times (\alpha_1, \beta_1).$$

Для x , лежащих в общей части промежутков $[x_0, b_1]$ и $[x_0, b_2)$

$$\varphi'(x, \mu) = f(x, \varphi(x, \mu), \mu),$$

$$\varphi'(x, \mu_0) = f(x, \varphi(x, \mu_0), \mu_0),$$

$$\varphi'(x, \mu) - \varphi'(x, \mu_0) = f(x, \varphi(x, \mu), \mu) - f(x, \varphi(x, \mu_0), \mu_0),$$

$$\begin{aligned} |\varphi'(x, \mu) - \varphi'(x, \mu_0)| &\leq |f(x, \varphi(x, \mu), \mu) - f(x, \varphi(x, \mu), \mu_0)| + |f(x, \varphi(x, \mu), \mu_0) - f(x, \varphi(x, \mu_0), \mu_0)| \\ |\varphi'(x, \mu) - \varphi'(x, \mu_0)| &\leq L|\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| + B(\mu), \text{ где } B(\mu) = \max_{(x, y) \in K_1} |f(x, y, \mu) - f(x, y, \mu_0)|. \end{aligned}$$

Поскольку функция f равномерно непрерывна на компакте E , то $B(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_0} 0$.

По лемме о дифференциальном неравенстве при $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$

$$|\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| \leq \frac{B(\mu)}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \leq \frac{B(\mu)}{L} (e^{L(b-x_0)} - 1) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_0} 0.$$

Подберем $\sigma > 0$ так, чтобы при $|\mu - \mu_0| < \sigma$ правая часть последнего неравенства была меньше η . Тогда при $x \in [x_0, b] \cap [x_0, b_2)$

$$|\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| < \eta.$$

График непродолжимого решения $y = \varphi(x, \mu)$, $x \in (a_2, b_2)$ должен покинуть компакт

$$K = \{(x, y) : x \in [a, b], |y - \varphi(x, \mu_0)| \leq \eta\}.$$

Если допустить, что $b_2 \leq b$, то график должен уйти из K через верхнюю или нижнюю границу, найдется такой $x \in (x_0, b)$, что $(x, \varphi(x, \mu)) \notin K$, $|\varphi(x, \mu) - \varphi(x, \mu_0)| > \eta$, что невозможно. Таким образом, решение $\varphi(x, \mu)$ определяется по крайней мере на $[x_0, b]$ и отклоняется на этом отрезке от графика φ меньше, чем на $\eta < \varepsilon$.

Теорема 2 Зависимость решения от начальных данных

Пусть задача Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

($f, \frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области G) с начальным условием

$$y|_{x_0} = y_0, \tag{2}$$

имеет решение $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$ ($x_0 \in (a, b)$).

Для $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in G$ через $y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ обозначим решение с начальным условием $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$.

(Заметим, что $\varphi(x, x_0, y_0) = \varphi(x)$).

Тогда φ — непрерывная функция трех переменных.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in G$, удовлетворяющих условию

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta, \text{ решение задачи Коши с начальным условием } y|_{\tilde{x}_0} = \tilde{y}_0 \text{ тоже}$$

определяется на отрезке $[a, b]$ и

$$\forall x \in [a, b] |\varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Доказательство.

1) Пусть сначала $\tilde{x}_0 = x_0$. Как и в Теореме 1, решение $y = \varphi(x)$ продолжается на отрезок $[a_1, b_1]$. Мы должны показать, что решение $y = \varphi(x, \tilde{y}_0)$ определяется на всем отрезке $[a, b]$ и его график не выходит из ε -коридора

$$K = \{(x, y) : x \in [a, b], |y - \varphi(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Можно считать, что

$$K_1 = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1], |y - \varphi(x)| \leq 2\varepsilon\} \subset G$$

(в противном случае можно уменьшить ε).

Рассматриваем сужение уравнения (1) на область G_1 — внутренность компакта K_1 . L — постоянная Липшица для области G_1 .

Пусть $(x_0, \tilde{y}_0) \in G_1$, $y = \varphi(x, \tilde{y}_0)$, $x \in (a_2, b_2)$ — непродолжимое решение д.у. (1) в области G_1 .

Для $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$ можем написать

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x, \varphi(x)), \\ \varphi'(x, \tilde{y}_0) &= f(x, \varphi(x, \tilde{y}_0)), \\ \varphi'(x, \tilde{y}_0) - \varphi'(x) &= f(x, \varphi(x, \tilde{y}_0)) - f(x, \varphi(x)), \\ |\varphi'(x, \tilde{y}_0) - \varphi'(x)| &\leq L |\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)|.\end{aligned}$$

По лемме о дифференциальном неравенстве при $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$

$$|\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)| \leq |\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(x-x_0)} \leq |\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(b-x_0)} \xrightarrow{\tilde{y}_0 \rightarrow y_0} 0.$$

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы неравенство

$$|\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(b-x_0)} < \varepsilon$$

выполнялось всякий раз, когда $|\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$.

График решения $y = \varphi(x, \tilde{y}_0)$, $x \in (a_2, b_2)$ должен покинуть компакт K . Выход возможен

только через правую границу, поэтому $b_2 > b$, т.е. решение $y = \varphi(x, \tilde{y}_0)$, $x \in (a_2, b_2)$

определяется на всем отрезке $[a, b]$ и его график проходит в ε -коридоре решения $y = \varphi(x)$:

$$\forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

2) Если точка $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ близка к (x_0, y_0) , то решение с начальным условием $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$

определено в точке x_0 и принимает в этой точке значение $\tilde{y}_0$, близкое к y_0 .

Уточним последнюю фразу.

По данному на $\varepsilon > 0$ подберем $\delta_0 > 0$ в соответствии с пунктом 1).

Можно считать, что замкнутый квадрат Π_0 с центром (x_0, y_0) и стороной $2\delta_0$ лежит в области G .

Положим $\delta = \frac{\delta_0}{M+2}$, где $M = \max_{(x,y) \in \Pi_0} |f(x,y)|$.

Пусть $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, $|\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$, тогда в Π_0 содержится квадрат Π_1 с центром $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и стороной $2\delta_1$, $\delta_1 = \delta_0 - \delta = \frac{(M+1)\delta_0}{M+2}$.

Решение задачи Коши с начальным условием $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ определяется по крайней мере на

отрезке $|x - \tilde{x}_0| \leq \min \left\{ \delta_1, \frac{\delta_1}{M} \right\}$, тем более на интервале $|x - \tilde{x}_0| < \frac{\delta_1}{M+1} = \delta$, в частности, оно

определено в точке x_0 . Положим $\tilde{\tilde{y}}_0 = \varphi(x_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$. Функция $y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ может

рассматриваться как решение с начальным условием $(x_0, \tilde{\tilde{y}}_0)$. Но $|\tilde{\tilde{y}}_0 - \tilde{y}_0| \leq M |x_0 - \tilde{x}_0| < M\delta$,

так что $|\tilde{\tilde{y}}_0 - y_0| < (M+1)\delta < \delta_0$.

Следовательно, решение $y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ определено на всем $[a, b]$ и

$$\forall x \in [a, b] \quad |\varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon.$$