Глава II. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

§1. Основные понятия и определения

Дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет вид

$$F\left(x,\ y,\ y'\right)=0, \tag{1}$$

где F — функция в области $D\subset\mathbb{R}^3$. Будем предполагать функцию F достаточное число раз непрерывно дифференцируемой. Уравнение (1) определяет поверхность в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $E\subset\mathbb{R}^2$ проекцию этой поверхности на плоскость Oxy:

$$E=\left\{\left(x,\ y\right):\exists y'\ F\left(x,\ y,\ y'\right)=0\right\}.$$

В каждой точке множества E уравнение (1) определяет одно или несколько направлений.

Определение. Непрерывно дифференцируемая функция $y=\varphi\left(x\right),\ x\in\left(a,\ b\right)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если она удовлетворяет этому уравнению, т.е.

$$\forall x\in\left(a,\ b\right)\ F\left(x,\ \varphi\left(x\right),\ \varphi'\left(x\right)\right)=0.$$

График решения называется интегральной кривой. Интегральная кривая во всех точках имеет одно из направлений, назначенных уравнением (1).

Пусть $\left(x_0,\ y_0\right)\in E$. Предположим, что имеется m чисел $y'_1,\ y'_2,\ldots,\ y'_m$, т.ч.

$$F\left(x_0,\ y_0,\ y'_k\right)=0,\ k=1,\ldots m.$$

Если во всех точках $\left(x_0,\ y_0,\ y'_k\right),\ k=1,\ldots m$ частная производная функции F по третьей переменной $\dfrac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$, то по теореме о неявной функции в некоторой окрестности каждой из этих точек уравнение (1) равносильно (с алгебраической точки зрения) уравнению

$$y'=f_k\left(x,\ y\right),\ k=1,\ldots,\ m. \tag{2}$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши каждое из уравнений (2) имеет единственное решение с начальным условием

$$y\big|_{x_0}=y_0. \tag{3}$$

В описанной ситуации точку $\left(x_0,\ y_0\right)$ называют обыкновенной точкой дифференциального уравнения (1).

Мы нашли m решений, m интегральных кривых, проходящих через точку $\left(x_0,\ y_0\right)$.

Интегральные кривые имеют разные направления.

Для однозначного определения решения условия Коши следует дополнить. Задача Коши для дифференциального уравнения (1) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего условиям

$$y\big|_{x_0}=y_0,\ y'\big|_{x_0}=y'_0. \tag{4}$$

Здесь y'_0 — одно из чисел, для которых $F\left(x_0,\ y_0,\ y'_0\right)=0$. Второе условие играет уточняющую роль.

В случае обращения в нуль $\dfrac{\partial F}{\partial y'}$ мы скажем, что $\left(x_0,\ y_0\right)$ — особая точка. Особые точки можно найти из системы

$$\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,\ y,\ y') = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Через особую точку может проходить более одной интегральной линии с общим направлением. Это точки неединственности.

Интегральная линия, целиком состоящая из точек неединственности, называется особой. Особым называется и соответствующее решение дифференциального уравнения.

Особое решение удовлетворяет системе (5).

Пример. $y^2 + y'^2 = 1$.

Система (5) имеет вид

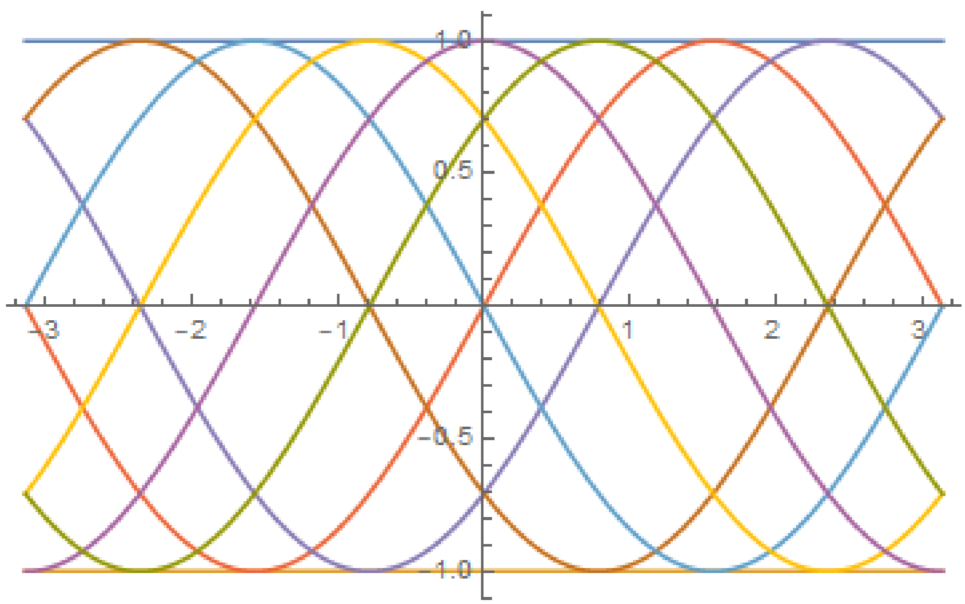
$$\begin{cases} y^2 + y'^2 = 1, \\ y' = 0. \end{cases}$$

Следствием этой системы являются равенства $y^2 = 1,\ y = \pm 1$. Функции $y = \pm 1$ — решения дифференциального уравнения. Другие решения даются формулой $y = \sin(x + C)$

$$(\ y' = \pm\sqrt{1 - y^2},\ \frac{y'}{\sqrt{1 - y^2}} = \pm 1,\ \arcsin y = \pm x + C,\ y = \sin(x + C)).$$

Решения $y = \pm 1$ оказываются особыми.

Через каждую точку полосы $-1 < y < 1$ проходят две интегральные кривые с разными направлениями.



§ 2. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной

1⁰. Разрешение уравнения относительно производной (см. § 1).

2⁰. Введение параметра.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$y = g(x,\ y') \tag{1}$$

или

$$x = h\left(y,\ y'\right). \tag{2}$$

Положим

$$p = y', \tag{3}$$

тогда

$$dy = pdx. \tag{4}$$

Для уравнения (1) имеем:

$$y = g\left(x,\ p\right),$$

$$dy = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp,$$

$$pdx = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial p}dp \text{ —} \tag{5}$$

уравнение в симметричной форме для переменных $x,\ p$.

Аналогично и для уравнения (2)

$$x = h\left(y,\ y'\right),$$

$$dx = \frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial p}dp,$$

$$dy = p\left(\frac{\partial h}{\partial y}dy + \frac{\partial h}{\partial p}dp\right). \tag{6}$$

3^0. Уравнения Лагранжа и Клеро.

Дифференциальное уравнение

$$y = x\varphi\left(y'\right) + \psi\left(y'\right), \tag{7}$$

где $\varphi\left(y'\right)$ отлично от тождественного y', называется уравнением Лагранжа.

Вводя параметр $p = y'$, получим

$$y = x\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right),$$

$$dy = \varphi\left(p\right)dx + x\varphi'\left(p\right)dp + \psi'\left(p\right)dp,$$

$$pdx = \varphi\left(p\right)dx + x\varphi'\left(p\right)dp + \psi'\left(p\right)dp,$$

$$\left(\varphi\left(p\right) - p\right)dx + x\varphi'\left(p\right)dp + \psi'\left(p\right)dp = 0 \text{ —} \tag{8}$$

линейное дифференциальное уравнение первого порядка для неизвестной функции x.

Если $x = \gamma\left(p\right)$ — решение уравнения (8), то решение уравнения (7) получается в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = \gamma\left(p\right), \\ y = \gamma\left(p\right)\varphi\left(p\right) + \psi\left(p\right). \end{cases}$$

Если $\varphi\left(p_0\right) = p_0$, то функция

$$y = p_0 x + \psi\left(p_0\right)$$

является решением дифференциального уравнения.

Дифференциальное уравнение

$$y = xy' + \psi\left(y'\right) \tag{9}$$

называется уравнением Клеро.

Здесь введение параметра $p = y'$ дает

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)\,dp\,,$$
$$\left(x + \psi'(p)\right)dp = 0\,.$$

Отсюда
$dp = 0,\ p = C,\ y = Cx + \psi(C)$ — семейство линейных решений
или

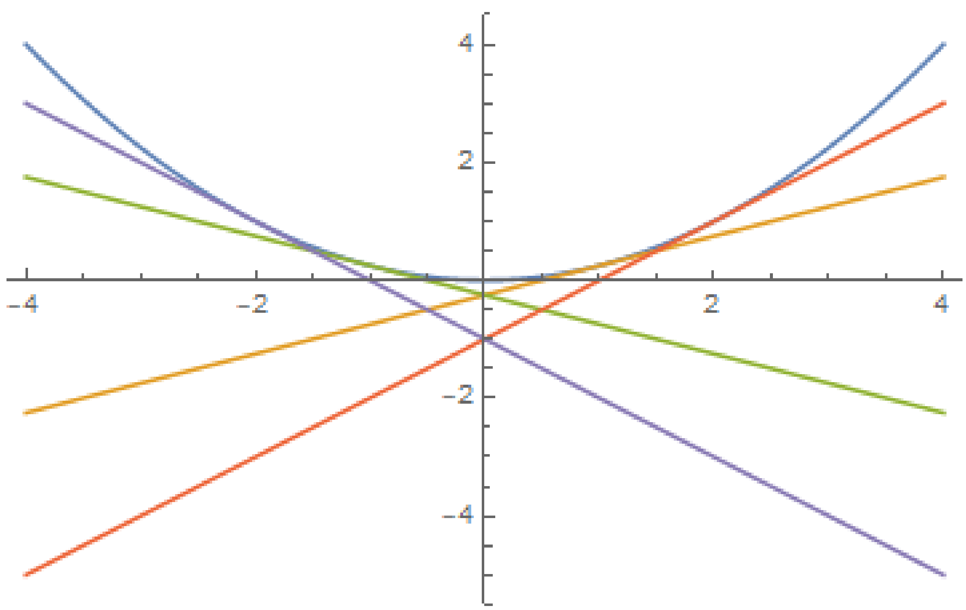
$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p). \end{cases}$$

(Гарантировать, что последняя система определяет решение можно если ψ дважды непрерывно дифференцируема и ψ'' не обращается в нуль).
Пример.

$$y = xy' - y'^2$$
$$y' = p,\ y = xp - p^2,\ pdx = pdx + xdp - 2pdp,\ (x - 2p)dp = 0\,.$$

1) $dp = 0,\ p = C,\ y = Cx - C^2$, 2) $x = 2p,\ p = \dfrac{x}{2},\ y = \dfrac{x^2}{4}$.

Интегральными кривыми оказываются парабола $y = \dfrac{x^2}{4}$ и всевозможные ее касательные.



§ 3. Огибающая семейства кривых

Пусть

$$\Phi(x,\ y,\ C) = 0 \text{ —} \tag{1}$$

уравнение однопараметрического семейства кривых (Φ непрерывно дифференцируема, $\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2$ не обращается в нуль).

Определение.
Гладкая кривая

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(C), \\ y = \psi(C) \end{cases}$$

называется огибающей семейства кривых (1), если в каждой своей точке $(\varphi(C), \psi(C))$ она касается кривой семейства (1), соответствующей значению параметра C, и отлична от этой кривой в любой окрестности этой точки.

Предложение. Если Γ — огибающая семейства (1), то функции φ, ψ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial C}(x, y, C) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Фиксируем значение параметра C_0. Кривая $\Phi(x, y, C_0) = 0$ имеет в точке $(\varphi(C_0), \psi(C_0))$ касательную с нормалью $\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)$, линия Γ имеет касательный вектор $(\varphi'(C_0), \psi'(C_0))$. Касание линий означает, что $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\varphi' + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\psi' = 0$.

При всех значениях параметра C имеет место равенство

$$\Phi(\varphi(C), \psi(C), C) = 0.$$

Дифференцирование этого равенства дает

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\varphi' + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\psi' + \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0,$$

так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C}(\varphi(C_0), \psi(C_0), C_0) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Если (1) — семейство интегральных кривых дифференциального уравнения, то огибающая — особая интегральная кривая.

Примеры.

1) $y' = 3y^{2/3}$, $y'^3 = 27y^2$, $y = (x + C)^3$. Система (2) имеет вид

$$\begin{cases} y = (x + C)^3, \\ 3(x + C)^2 = 0. \end{cases}$$

Исключение параметра дает уравнение огибающей

$$y = 0.$$

2) $y = Cx - C^2$ — семейство интегральных линий уравнения Клеро $y = xy' - y'^2$. Огибающую $y = \dfrac{x^2}{4}$ находим из системы

$$\begin{cases} y = Cx - C^2, \\ x - 2C = 0. \end{cases}$$

3) Найти кривую, на касательных которой координатные оси высекают отрезки постоянной длины.

Пусть касательная пересекает координатные оси в точках с координатами $u,\ v$, отрезок касательной имеет длину $u^2+v^2=a^2$.
Если $(x,\ y)$ — точка касания, то $v=y-xy',\ u^2+v^2=v^2(1+1/y'^2)=(y-xy')^2(1+1/y'^2)$.
Получается равенство $(y-xy')^2\left(1+1/y'^2\right)=a^2,\ y-xy'=\pm\dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$. Мы пришли к уравнению Клеро. Для простоты возьмем здесь знак минус. Положим $y'=p$, тогда

$$y=px-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},\ pdx=pdx+xdp-\frac{adp}{\left(1+p^2\right)^{3/2}},\ \left(x-\frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}\right)dp=0.$$

Что дает нам семейство прямых $y+Cx=+\dfrac{aC}{\sqrt{1+C^2}}$ $(C=-p)$ и линию, заданную параметрически

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}, \\ y=p\dfrac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}-\dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}=-\dfrac{ap^3}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}. \end{cases}$$

Исключение параметра p дает $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. Мы узнаем астроиду.

Глава III. Дифференциальные уравнения высших порядков

§1. Основные понятия и определения

Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F\left(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)}\right)=0, \tag{1}$$

F — непрерывная функция в области $D\subset\mathbb{R}^{n+2}$.
n раз непрерывно дифференцируемая функция $y=\varphi(x),\ x\in(a,b)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если

$$\forall x\in(a,b)\ F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)\right)=0.$$

Уравнение

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

называется дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.
Задача Коши для дифференциального уравнения (2) состоит в отыскании решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y\big|_{x_0}=y_0,\ y'\big|_{x_0}=y'_0,\dots,y^{(n-1)}\big|_{x_0}=y_0^{(n-1)}.$$

Для дифференциального уравнения (1) добавляется условие

$$y^{(n)}\big|_{x_0}=y_0^{(n)},\ \text{где}\ F\left(x_0,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n)}\right)=0.$$

§2. Существование и единственность решения задачи Коши

Теорема
Пусть функция f непрерывно дифференцируема.
Тогда задача Коши для дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y\big|_{x_0} = y_0,\ y'\big|_{x_0} = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}\Big|_{x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

имеет единственное решение
Дифференциальное уравнение

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{3}$$

сводится к уравнению (1) с помощью теоремы о неявной функции. Если $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}\right)$ уравнение (3) равносильно уравнению вида (1). Задача Коши имеет единственное решение.

§3. Понижение порядка дифференциального уравнения

1^0. Дифференциальное уравнение, не содержащее неизвестной функции

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Замена неизвестной функции

$$z = y^{(k)} \tag{2}$$

приводит нас к уравнению

$$F\left(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}\right) = 0 \tag{3}$$

Порядок уравнения понижен на k единиц.
Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1), то $z = \psi(x) = \varphi^{(k)}(x)$ — решение уравнения (3).
Если $z = \psi(x)$ — решение уравнения (3), а $y = \varphi(x)$ — решение уравнения

$$y^{(k)} = \psi(x), \tag{4}$$

то $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (1).

Пример.

$$xy''' + y'' = 0 \qquad (x > 0).$$

$$z = y'', \quad xz' + z = 0,$$

$$z = \frac{C_1}{x},$$

$$y'' = \frac{C_1}{x},$$

$$y' = C_1 \ln x + C_2,$$

$$y = C_1 x \ln x + C_2 x + C_3.$$

2^0. Дифференциальное уравнение, не содержащее независимой переменной

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{5}$$

Положим

$$z = y',\ z = z(y). \tag{6}$$

Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z,$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dz}{dy} \cdot z\right) z = \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z, \tag{7}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Подставляя (7) в (5), получим уравнение

$$F_1\left(y, z, \frac{dz}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} z}{dy^{n-1}}\right) = 0. \tag{8}$$

Порядок уравнения понижен на единицу.

Если $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (5), то $z = \gamma(y) = \varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right)$ — решение уравнения (8).

Если $z = \gamma(y)$ — решение уравнения (8), а $y = \varphi(x)$ — решение уравнения

$$y' = \gamma(y), \tag{9}$$

то $y = \varphi(x)$ — решение дифференциального уравнения (5).

Проведем вычисления для $n = 3$. Наши дифференциальные уравнения принимают вид

$$F\left(y, y', y'', y'''\right) = 0 \tag{5*}$$

$$F\left(y, z, \frac{dz}{dy} z, \frac{d^2 z}{dy^2} z^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 z\right) = 0 \tag{8*}$$

Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (5*), т.е.

$$\forall x \in (a, b)\ \ F\left(\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \varphi'''(x)\right) = 0.$$

Положим

$$\gamma(y) = \varphi'\left(\varphi^{-1}(y)\right).$$

Тогда

$$\gamma\left(\varphi(x)\right) = \varphi'(x),$$

$$\gamma'\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right) = \varphi''(x),$$

$$\gamma''\left(\varphi(x)\right)\gamma^2\left(\varphi(x)\right) + \gamma'^2\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right) = \varphi'''(x),$$

и

$$F\left(\varphi(x), \gamma\left(\varphi(x)\right), \gamma'\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right), \gamma''\left(\varphi(x)\right)\gamma^2\left(\varphi(x)\right) + \gamma'^2\left(\varphi(x)\right)\gamma\left(\varphi(x)\right)\right) = 0.$$

Полагая $x = \varphi^{-1}(y)$, получаем

$$F\left(y, \gamma(y), \gamma'(y)\gamma(y), \gamma''(y)\gamma^2(y) + \gamma'^2(y)\gamma(y)\right) = 0,$$

$z = \gamma(y)$ — решение уравнения (8*).

Если $z = \gamma(y)$ — решение уравнения (8*), а $y = \varphi(x)$ — решение уравнения $y' = \gamma(y)$, то $\varphi'(x) = \gamma\left(\varphi(x)\right)$ и мы приходим к выводу, что $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (5*).

Замечание. Выполняя замену $y' = z = z(y)$, мы исключаем из рассмотрения решения вида $y = const$. Вопрос о наличии таких решений следует рассмотреть отдельно.

Пример $y'' = y'$. 1) $z = y',\ z' = z,\ z = C_1 e^x,\ y' = C_1 e^x,\ y = C_1 e^x + C_2$.

2) Заметим, что постоянные функции являются решениями.

$z = y',\ z = z(y),\ z\dfrac{dz}{dy} = z,\ \dfrac{dz}{dy} = 1,\ z = y + C_1,\ y' = y + C_1,\ y = C_2 e^x - C_1$.

3⁰. Дифференциальное уравнение с точной производной в левой части.

Речь идет о дифференциальном равнении вида

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{10}$$

где

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\right). \tag{11}$$

Фигурирующее здесь полное дифференцирование означает дифференцирование при условии, что $y = y(x)$,

$$\frac{d}{dx}\left(\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$

Уравнение (10) сводится к семейству уравнений

$$\Phi\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C \tag{12}$$

порядка $(n-1)$.

Пример $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$, $\left[\ln|y'| - \ln\left(1+y^2\right)\right]' = 0$, $\ln|y'| - \ln\left(1+y^2\right) = \ln C_1$, $\dfrac{y'}{1+y^2} = C_1$,

$\operatorname{arctg} y = C_1 x + C_2$.

Если уравнение (10) не является уравнением с точной производной, можно попытаться умножить уравнение на интегрирующий множитель для формирования точной производной.

Примеры

1) $yy'' = y'^2,\ \dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y},\ \ln|y'| = \ln|C_1 y|,\ y' = C_1 y,\ y = C_2 e^{C_1 x}$.

2) $y'' = f(y),\ 2y'y'' = 2f(y)y',\ y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C_1$.