§ 7. Продолжение решений

1⁰. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y' = f(x,\, y), \tag{1}$$

f непрерывна и удовлетворяет локально условию Липшица по y в области G. Таким образом, G — область единственности.

Определение.

Мы скажем, что решение $y=\varphi_1(x),\ x\in\Delta_1$ имеет своим продолжением решение $y=\varphi_2(x),\ x\in\Delta_2$, если $\Delta_1\subset\Delta_2$ и $\varphi_1=\varphi_2\big|_{\Delta_1}$.

Замечание. Можно ограничиться рассмотрением решений, определенных на интервалах, поскольку с промежутка другого типа решение всегда можно распространить на более широкий интервал.

Пусть $y=\varphi_1(x),\ x\in(a_1,\, b_1)$ и $y=\varphi_2(x),\ x\in(a_2,\, b_2)$ — два решения задачи Коши для уравнения (1) с начальным условием

$$y\big|_{x_0} = y_0. \tag{2}$$

По теореме единственности $\varphi_1=\varphi_2$ на общей части интервалов $(a_1,\, b_1)$ и $(a_2,\, b_2)$. Функция

$$\varphi:\varphi(x)=\begin{cases}\varphi_1(x),\ x\in(a_1,\, b_1),\\ \varphi_2(x),\ x\in(a_2,\, b_2)\end{cases}$$

является решением задачи Коши и продолжает решения $\varphi_1,\ \varphi_2$.

2⁰. Теорема 1.

Задача Коши (1), (2) имеет единственное непродолжимое решение, т.е. решение, которое является продолжением для любого решения.

Доказательство.

Рассмотрим совокупность всевозможных решений задачи Коши. Пусть Δ — объединение всех промежутков, на которых определяются решения. Ясно, что Δ — интервал, $\Delta=(a,\, b)$.

На $(a,\, b)$ определим функцию φ. Если $x\in(a,\, b)$, то все решения, определенные в этой точке имеют общее значение, которое мы и объявим значением функции φ. Функция φ — решение задачи Коши. Оно является продолжением для любого решения.

Дополнение.

Можно доказать, что решение $y=\varphi(x),\ x\in(a,\, b)$ непродолжимо вправо в том и только в том случае, если выполнено одно из условий:

1) $b=+\infty$, 2) $\varphi(x)\underset{x\to b-0}{\to}\pm\infty$, 3) расстояние от $(x,\, \varphi(x))$ до границы области G бесконечно мало при $x\to b-0$.

3⁰. Теорема 2.

Пусть K — компакт, лежащий в области G. $y=\varphi(x),\ x\in(a,\, b)$ — непродолжимое решение уравнение (1).

Тогда существуют такие числа $x_1,\ x_2\in(a,\, b)$, что при $x<x_1$ и $x>x_2$ точка $(x,\, \varphi(x))$ лежит вне компакта K.

Доказательство. Установим существование числа x_2.

Справедливость утверждения теоремы не вызывает сомнений, если $b=+\infty$.

Рассмотрим случай конечного b.
Подберем число $\delta > 0$ так, чтобы компакт
$$K_1 = \{(x,\ y) \mid \rho((x,\ y),\ K) \le 2\delta\}$$
содержался в области G. Функция f ограничена на K_1: $|f(x,\ y)| \le M$.

Если $(\bar{x},\ \bar{y}) \in K$, то квадрат $|x - \bar{x}| \le \delta,\ |y - \bar{y}| \le \delta$ содержится в K_1. Положим $\eta = \min\left\{\delta,\ \dfrac{\delta}{M}\right\}$

В теореме существования удалось построить решение на отрезке Пеано $[\bar{x} - \eta,\ \bar{x} + \eta]$.

Число $x_2 = b - \eta$ удовлетворяет условиям теоремы. В самом деле, если $(\bar{x},\ \varphi(\bar{x})) \in K$ при некотором $\bar{x} > x_2$, то решение φ окажется определенным по крайней мере на интервале $(\bar{x} - \eta,\ \bar{x} + \eta)$. Поэтому $\bar{x} + \eta \le b$, вопреки выбору $\bar{x}$.

4^0. Теорема 3. (О непродолжимых решениях почти линейного уравнения)
Пусть функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y в области $G = (a,\ b) \times (-\infty,\ +\infty)$. Для $a,\ b$ допускаются значения $\pm\infty$. Предположим далее, что выполнено неравенство
$$|f(x, y)| \le A(x)|y| + B(x),$$
где $A,\ B$ — непрерывные положительные функции.

Тогда всякое решение дифференциального уравнения (1) продолжается на интервал $(a,\ b)$**.**

Доказательство. Пусть $y = \varphi(x),\ x \in (a_1,\ b_1)$ — непродолжимое решение. Покажем, что $b_1 = b$. Допустим $b_1 < b$. Выберем некоторую точку $x_0 \in (a_1,\ b_1)$. По теореме о дифференциальном неравенстве функция φ ограничена на $[x_0,\ b_1)$:
$$\left(|\varphi(x)| \le |\varphi(x_0)| e^{A_0(x - x_0)} + \frac{B_0}{A_0}\left(e^{A_0(x - x_0)} - 1\right),\ A_0 = \max_{x \in [x_0,\ b_1]} |A(x)|,\ B_0 = \max_{x \in [x_0,\ b_1]} |B(x)|\right)$$
$|\varphi(x)| \le M$ при $x \in [x_0,\ b_1)$. По теореме 2 интегральная кривая $y = \varphi(x)$ должна покинуть компакт $[x_0,\ b_1] \times [-M,\ M]$, найдется такой $x \in [x_0,\ b_1]$, что $|\varphi(x)| > M$, вопреки выбору числа M.

Отметим существенность условия теоремы 3.

Пример. Ненулевые решения уравнения $y' = y^2$ не допускают продолжения на $(-\infty,\ +\infty)$. Например, функция $y = -\dfrac{1}{x},\ x \in (-\infty,\ 0)$ является непродолжимым решением.

§ 8 Гладкость решений

Мы продолжаем рассмотрение дифференциального уравнения
$$y' = f(x,\ y). \tag{1}$$
Каждое решение φ этого уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией. Предположим, что функция f непрерывно дифференцируема. Тогда равенство
$$\varphi'(x) = f(x,\ \varphi(x))$$
влечет существование второй непрерывной производной функции φ:

$$\varphi''(x)=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\varphi'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то решение имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно:

$$\varphi'''=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot f+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot f^2+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f\right)$$

Если функция f p раз непрерывно дифференцируема, то решение имеет непрерывные производные до $(p+1)$-го порядка включительно.

§ 9 Непрерывная зависимость решения от начальных условий и параметров

В реальных задачах начальные условия и правая часть дифференциального уравнения оказываются известными лишь в приближенном смысле. Хотелось бы надеяться, что малым изменениям начальных условий и правой части дифференциального уравнения соответствуют малые изменения решения.

Теорема 1 Зависимость решения от параметров

Пусть f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ — непрерывные функции (трех переменных) в области $G\times(\alpha,\ \beta)$, $(x_0,y_0)\in G$.

Поставим задачу Коши

$$y'=f(x,\ y,\ \mu), \tag{1}$$

$$y\big|_{x_0}=y_0 \tag{2}$$

Тогда решение $y=\varphi(x,\ \mu)$ задачи Коши (1), (2) непрерывно зависит от параметра μ:

Если для некоторого $\mu_0\in(\alpha,\beta)$ решение $y=\varphi(x,\ \mu_0)$ задачи Коши определено на отрезке $[a,\ b]$ $(x_0\in(a,b))$, то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\sigma>0$, что для μ, удовлетворяющих условию $|\mu-\mu_0|<\sigma$, решение тоже определяется на всем отрезке $[a,\ b]$ и

$$\forall x\in[a,\ b]\ \left|\varphi(x,\ \mu)-\varphi(x,\ \mu_0)\right|<\varepsilon.$$

Замечание 1. Утверждение теоремы означает, в частности, что функция φ является непрерывной функцией двух переменных.

Замечание 2. Наличие непрерывной частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ влечет за собой условие Липшица по y для любой компактной части K области G и отрезка $[\alpha_1,\beta_1]\subset(\alpha,\beta)$. Роль константы Липшица выполняет $L=\max\limits_{(x,y)\in E,\mu\in[\alpha_1,\beta_1]}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\mu)\right|$.

Доказательство теоремы 1.

Мы должны показать, что для μ, близких к μ_0, решение $y=\varphi(x,\mu)$ определяется на всем $[a,b]$ и его график проходит в ε-коридоре

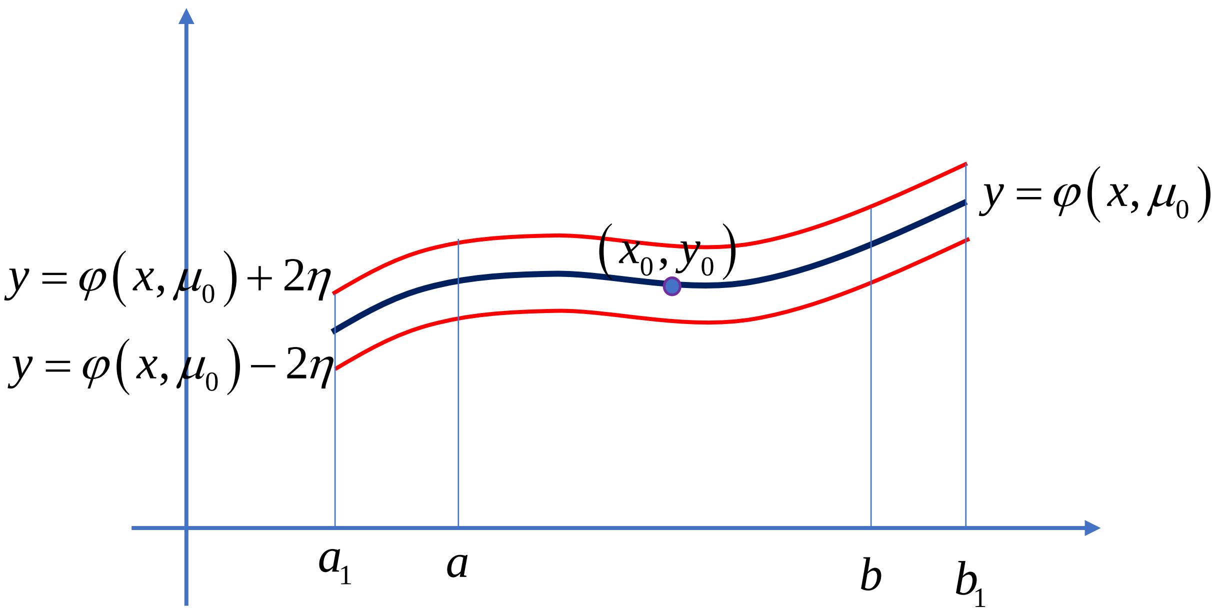
$$K=\left\{(x,\ y):x\in[a,\ b],\ \left|y-\varphi(x,\mu_0)\right|\le\varepsilon\right\}$$

графика решения $y=\varphi(x,\mu_0)$.

Решение φ допускает продолжение с отрезка $[a,\, b]$ на более широкий отрезок $[a_1,\, b_1]$, $(a_1,b_1)\supset[a,b]$.

Ограничимся изучением поведения решений на отрезке $[x_0,b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Подберем такое положительное $\eta<\varepsilon$, что компакт

$$K_1=\{(x,\ y):\ x\in[a_1,\, b_1],\ |y-\varphi(x,\mu_0)|\le 2\eta\}\subset G.$$



Подберем еще такой отрезок $[\alpha_1,\beta_1]\subset(\alpha,\beta)$, что $\mu_0\in(\alpha_1,\beta_1)$. Через L обозначим постоянную Липшица для компакта

$$E=K_1\times[\alpha_1,\beta_1]\subset G\times(a,\beta).$$

Рассмотрим сужение д.у. (1) на область $G_1\times(\alpha_1,\beta_1)$ — внутренность компакта E.

Зафиксируем некоторое $\mu\in(\alpha_1,\beta_1)$ и рассмотрим непродолжимое решение $y=\varphi(x,\mu),\ x\in(a_2,b_2)$ д.у. (1) на области $G_1\times(\alpha_1,\beta_1)$.

Для x, лежащих в общей части промежутков $[x_0,\, b_1]$ и $[x_0,b_2)$

$$\varphi'(x,\mu)=f(x,\ \varphi(x,\mu),\mu),$$

$$\varphi'(x,\mu_0)=f(x,\ \varphi(x,\mu_0),\mu_0),$$

$$\varphi'(x,\mu)-\varphi'(x,\mu_0)=f(x,\ \varphi(x,\mu),\mu)-f(x,\ \varphi(x,\mu_0),\mu_0),$$

$$|\varphi'(x,\mu)-\varphi'(x,\mu_0)|\le|f(x,\ \varphi(x,\mu),\mu)-f(x,\ \varphi(x,\mu),\mu_0)|+|f(x,\ \varphi(x,\mu),\mu_0)-f(x,\ \varphi(x,\mu_0),\mu_0)|$$

$$|\varphi'(x,\mu)-\varphi'(x,\mu_0)|\le L|\varphi(x,\mu)-\varphi(x,\mu_0)|+B(\mu),\ \text{где}\ B(\mu)=\max_{(x,y)\in K_1}|f(x,y,\mu)-f(x,y,\mu_0)|.$$

Поскольку функция f равномерно непрерывна на компакте E, то $B(\mu)\underset{\mu\to\mu_0}{\to}0$.

По лемме о дифференциальном неравенстве при $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$

$$\left|\varphi(x,\mu) - \varphi(x,\mu_0)\right| \le \frac{B(\mu)}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \le \frac{B(\mu)}{L}\left(e^{L(b-x_0)} - 1\right) \underset{\mu \to \mu_0}{\to} 0 .$$

Подберем $\sigma > 0$ так, чтобы при $|\mu - \mu_0| < \sigma$ правая часть последнего неравенства была меньше η. Тогда при $x \in [x_0, b] \cap [x_0, b_1)$

$$\left|\varphi(x,\mu) - \varphi(x,\mu_0)\right| < \eta .$$

График непродолжимого решения $y = \varphi(x,\mu),\ x \in (a_1, b_1)$ должен покинуть компакт

$$K = \left\{(x,\ y) : x \in [a,\ b],\ \left|y - \varphi(x,\mu_0)\right| \le \eta\right\}.$$

Если допустить, что $b_1 \le b$, то график должен уйти из K через верхнюю или нижнюю границу, найдется такой $x \in (x_0,\ b)$, что $(x,\ \varphi(x,\mu)) \notin K,\ \left|\varphi(x,\mu) - \varphi(x,\mu_0)\right| > \eta$, что невозможно. Таким образом, решение $\varphi(x,\mu)$ определяется по крайней мере на $[x_0,\ b]$ и отклоняется на этом отрезке от графика φ меньше, чем на $\eta < \varepsilon$.

Теорема 2 Зависимость решения от начальных данных

Пусть задача Коши для дифференциального уравнения

$$y' = f(x,\ y) \tag{1}$$

($f,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области G) с начальным условием

$$y\big|_{x_0} = y_0 , \tag{2}$$

имеет решение $y = \varphi(x),\ x \in [a,\ b]$ ($x_0 \in (a,\ b)$).

Для $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) \in G$ через $y = \varphi(x,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$ обозначим решение с начальным условием $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$.

(Заметим, что $\varphi(x,\ x_0,\ y_0) = \varphi(x)$).

Тогда φ — непрерывная функция трех переменных.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) \in G$, удовлетворяющих условию $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta,\ |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$, решение задачи Коши с начальным условием $y\,|_{\tilde{x}_0} = \tilde{y}_0$ тоже определяется на отрезке $[a,\ b]$ и

$$\forall x \in [a,\ b]\ \left|\varphi(x,\ \tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) - \varphi(x,\ x_0,\ y_0)\right| < \varepsilon .$$

Доказательство.

1) Пусть сначала $\tilde{x}_0 = x_0$. Как и в Теореме 1, решение $y = \varphi(x)$ продолжается на отрезок $[a_1, b_1]$. Мы должны показать, что решение $y = \varphi(x, \tilde{y}_0)$ определяется на всем отрезке $[a,b]$ и его график не выходит из ε-коридора

$$K = \left\{(x,\ y) : x \in [a,\ b],\ \left|y - \varphi(x)\right| \le \varepsilon\right\} .$$

Можно считать, что

$$K_1 = \left\{(x,\ y) : x \in [a_1,\ b_1],\ \left|y - \varphi(x)\right| \le 2\varepsilon\right\} \subset G$$

(в противном случае можно уменьшить ε).

Рассматриваем сужение уравнения (1) на область G_1 — внутренность компакта K_1. L — постоянная Липшица для области G_1.

Пусть $(x_0, \tilde{y}_0) \in G_1$, $y = \varphi(x, \tilde{y}_0), x \in (a_2, b_2)$ — непродолжимое решение д.у. (1) в области G_1.
Для $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$ можем написать

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

$$\varphi'(x, \tilde{y}_0) = f(x, \varphi(x, \tilde{y}_0)),$$

$$\varphi'(x, \tilde{y}_0) - \varphi'(x) = f(x, \varphi(x, \tilde{y}_0)) - f(x, \varphi(x)),$$

$$|\varphi'(x, \tilde{y}_0) - \varphi'(x)| \le L|\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)|.$$

По лемме о дифференциальном неравенстве при $x \in [x_0, b_1] \cap [x_0, b_2)$

$$|\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)| \le |\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(x-x_0)} \le |\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(b-x_0)} \underset{\tilde{y}_0 \to y_0}{\to} 0.$$

Подберем $\delta > 0$ так, чтобы неравенство

$$|\tilde{y}_0 - y_0| e^{L(b-x_0)} < \varepsilon$$

выполнялось всякий раз, когда $|\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$.

График решения $y = \varphi(x, \tilde{y}_0), x \in (a_2, b_2)$ должен покинуть компакт K. Выход возможен только через правую границу, поэтому $b_2 > b$, т.е. решение $y = \varphi(x, \tilde{y}_0), x \in (a_2, b_2)$ определяется на всем отрезке $[a, b]$ и его график проходит в ε-коридоре решения $y = \varphi(x)$:

$$\forall x \in [a, b] \; |\varphi(x, \tilde{y}_0) - \varphi(x)| \le \varepsilon.$$

2) Если точка $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ близка к (x_0, y_0), то решение с начальным условием $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ определено в точке x_0 и принимает в этой точке значение $\tilde{\tilde{y}}_0$, близкое к y_0.
Уточним последнюю фразу.
По данному на $\varepsilon > 0$ подберем $\delta_0 > 0$ в соответствии с пунктом 1).
Можно считать, что замкнутый квадрат Π_0 с центром (x_0, y_0) и стороной $2\delta_0$ лежит в области G.

Положим $\delta = \dfrac{\delta_0}{M+2}$, где $M = \max\limits_{(x, y) \in \Pi_0} |f(x, y)|$.

Пусть $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$, тогда в Π_0 содержится квадрат Π_1 с центром $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ и стороной $2\delta_1$, $\delta_1 = \delta_0 - \delta = \dfrac{(M+1)\delta_0}{M+2}$.

Решение задачи Коши с начальным условием $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ определяется по крайней мере на отрезке $|x - \tilde{x}_0| \le \min\left\{\delta_1, \dfrac{\delta_1}{M}\right\}$, тем более на интервале $|x - \tilde{x}_0| < \dfrac{\delta_1}{M+1} = \delta$, в частности, оно определено в точке x_0. Положим $\tilde{\tilde{y}}_0 = \varphi(x_0, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$. Функция $y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ может рассматриваться как решение с начальным условием $(x_0, \tilde{\tilde{y}}_0)$. Но $|\tilde{\tilde{y}}_0 - \tilde{y}_0| \le M|x_0 - \tilde{x}_0| < M\delta$, так что $|\tilde{\tilde{y}}_0 - y_0| < (M+1)\delta < \delta_0$.

Следовательно, решение $y = \varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ определено на всем $[a, b]$ и

$$\forall x \in [a, b] \; |\varphi(x, \tilde{x}_0, \tilde{y}_0) - \varphi(x, x_0, y_0)| < \varepsilon.$$