# § 4. Поверхностный интеграл второго рода (интеграл 2-формы)

## $1^0$ Кососимметрические формы второго порядка

Пусть $E$ $\left(=\mathbb{R}^n\right)$ — $n$-мерное линейное пространство. Функция $L$ двух переменных из $E$ (т.е. функция на $E^2$) называется билинейной формой, если она линейна по каждой переменной.

Пусть $e_1,\dots,e_n$ — базис, тогда $L$ можно отождествить с набором определяющих ее чисел $a_{ij}=L\left(e_i,e_j\right)$ Если $\xi=\xi^i e_i,\eta=\eta^j e_j$ — разложения векторов по базису, то $L\left(\xi,\eta\right)=a_{ij}\xi^i\eta^j$.

В другом базисе $\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_n$, для которого $\tilde{e}_k=c_k^i e_i$ получим набор

$$\tilde{a}_{kl}=L\left(\tilde{e}_k,\tilde{e}_l\right)=a_{ij}c_k^i c_l^j . \tag{1}$$

$2$-формы на линейном пространстве $E$ сами образуют линейное пространство.

**Форма $L$ называется косой (кососимметрической),** если для любых $\xi,\eta\in E$ имеет место равенство

$$L(\xi,\eta)=-L(\eta,\xi). \tag{2}$$

Если $L$ кососимметрична, то $\forall\xi\;\; L\left(\xi,\xi\right)=0$.

**Внешнее умножение линейных форм**

Пусть $L_1,L_2$ — линейные формы.

Кососимметрическая форма

$$L=L_1\wedge L_2: L\left(\xi,\eta\right)=L_1\left(\xi\right)L_2\left(\eta\right)-L_1\left(\eta\right)L_2\left(\xi\right)=\begin{vmatrix} L_1\left(\xi\right) & L_1\left(\eta\right)\\ L_2\left(\xi\right) & L_2\left(\eta\right)\end{vmatrix} \tag{3}$$

называется внешним произведением линейных форм $L_1,L_2$.

Внешнее произведение линейно по каждому сомножителю, антисимметрично:

$$L_1\wedge L_2=-L_2\wedge L_1,\quad L\wedge L=0.$$

Рассмотрим внешнее произведение базисных форм $dx^i,dx^j$ $\left(i<j\right)$.

$$\left(dx^i\wedge dx^j\right)\left(\xi,\eta\right)=dx^i\left(\xi\right)dx^j\left(\eta\right)-dx^i\left(\eta\right)dx^j\left(\xi\right)=\xi^i\eta^j-\xi^j\eta^i=\begin{vmatrix}\xi^i & \eta^i\\ \xi^j & \eta^j\end{vmatrix}.$$

Заметим, что $dx^i\wedge dx^i=0, dx^i\wedge dx^j=-dx^j\wedge dx^i$.

Произведения $dx^i\wedge dx^j$ $\left(i<j\right)$ образуют базис в пространстве кососимметрических (косых) билинейных форм.

Размерность пространства косых форм оказывается равной $C_n^2=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$.

Если $n=2$, пространство одномерно, базис состоит из одной формы

$$dx\wedge dy(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}\xi^1\eta^1\\ \xi^2\eta^2\end{vmatrix}.$$

Если $n=3$, пространство трехмерно, базис состоит из трех форм

$$dy\wedge dz, dz\wedge dz, dx\wedge dy.$$

## 2$^0$ Дифференциальные формы второго порядка

**Определение.** Дифференциальной формой второго порядка (2-формой) в области $G\subset\mathbb{R}^n$ называется отображение $\omega$ области $G$ в пространство косых форм второго порядка. $\omega$ — это правило, которое каждой точке $w\in G$ ставит в соответствие косую форму $\omega(w)$.

Над дифференциальными формами поточечно выполняются операции сложения и умножения на число, внешнее умножение линейных форм дает 2-форму.

Внешнее произведение линейно по каждому сомножителю, антисимметрично.

2-форму $\omega$ в области $G\subset\mathbb{R}^n$ можно записать в виде

$\omega=\sum\limits_{1\le i<j\le n}P_{ij}dx^i\wedge dx^j$, где $P_{ij}$ — функции в $G$.

Функции $P_{ij}$ будем предполагать достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми.

Часто говорят, что дифференциальная форма — это просто выражение $\sum\limits_{1\le i<j\le n}P_{ij}dx^i\wedge dx^j$.

В $\mathbb{R}^3$ 2-форма имеет вид $\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$, в $\mathbb{R}^2$ — $\omega=Pdx\wedge dy$.

## 3$^0$ Перенос форм

Пусть $\Phi:\bar{\Omega}\to\Sigma\subset G\subset\mathbb{R}^3$ — простая поверхность в области $G$,
$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$ — 2-форма в области $G$

Отображение $\Phi$ переносит 2-форму в область $\Omega$. В области $\Omega$ получаем форму $\omega^*$, для которой

$$\omega^*(w)(\xi,\eta)=\omega(\Phi(w))(d\Phi(\xi),d\Phi(\eta)). \tag{4}$$

Перенос форм линеен, сохраняет внешнее произведение: если $\omega_1,\omega_2$ — линейные формы, $\omega=\omega_1\wedge\omega_2$, то $\omega^*=\omega_1{}^*\wedge\omega_2{}^*$. Действительно,

$$\omega^*(\xi,\eta)=\omega(d\Phi(\xi),d\Phi(\eta))=\omega_1(d\Phi(\xi))\omega_2(d\Phi(\eta))-\omega_1(d\Phi(\eta))\omega_2(d\Phi(\xi))=$$
$$=\omega_1{}^*(\xi)\omega_2{}^*(\eta)-\omega_1{}^*(\eta)\omega_2{}^*(\xi)=(\omega_1{}^*\wedge\omega_2{}^*)(\xi,\eta).$$

Проведем координатные вычисления.

$$\omega^*=P^*(dy\wedge dz)^*+Q^*(dz\wedge dx)^*+R^*(dx\wedge dy)^*.$$

Пусть $\xi=\begin{pmatrix}\xi^u\\ \xi^v\end{pmatrix},\ \eta=\begin{pmatrix}\eta^u\\ \eta^v\end{pmatrix};\ \xi^*=d\Phi(\xi)=\begin{pmatrix}\xi^{*x}\\ \xi^{*y}\\ \xi^{*z}\end{pmatrix},\ \eta^*=d\Phi(\eta)=\begin{pmatrix}\eta^{*x}\\ \eta^{*y}\\ \eta^{*z}\end{pmatrix}$, тогда

$$(dx\wedge dy)^*(\xi,\eta)=(dx\wedge dy)(\xi^*,\eta^*)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\xi^u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\xi^v & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\eta^u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\eta^v\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\xi^u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\xi^v & \frac{\partial\psi}{\partial u}\eta^u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\eta^v\end{vmatrix}=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\begin{vmatrix}\xi^u & \eta^u\\ \xi^v & \eta^v\end{vmatrix}$$

$$(dx\wedge dy)^*=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,\ (dz\wedge dx)^*=\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,\ (dy\wedge dz)^*=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv$$

$$\omega^*=\left(P^*\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}+Q^*\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}+R^*\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)du\wedge dv\,. \tag{5}$$

Здесь $P^*=P\circ\Phi, Q^*=Q\circ\Phi, R^*=R\circ\Phi$.

Выражение для $\omega^*$ можно записать еще в виде

$$\omega^*=\begin{vmatrix}P^* & Q^* & R^*\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}du\wedge dv\,. \tag{6}$$

Другой возможный вариант рассуждения опирается на ранее описанный процесс переноса линейных форм и только что установленное сохранение внешнего произведения при переносе.

$$(dx)^*=d\varphi,(dy)^*=d\psi,(dz)^*=d\chi;$$
$$(dy\wedge dz)^*=d\psi\wedge d\chi,(dz\wedge dx)^*=d\chi\wedge d\varphi,(dx\wedge dy)^*=d\varphi\wedge d\psi;$$
$$\omega^*=P^*d\psi\wedge d\chi+Q^*d\chi\wedge d\varphi+R^*d\varphi\wedge d\psi.$$

Но

$$(d\varphi\wedge d\psi)(\xi,\eta)=\begin{vmatrix}d\varphi(\xi) & d\varphi(\eta)\\ d\psi(\xi) & d\psi(\eta)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\xi^u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\xi^v & \frac{\partial\varphi}{\partial u}\eta^u+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\eta^v\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}\xi^u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\xi^v & \frac{\partial\psi}{\partial u}\eta^u+\frac{\partial\psi}{\partial v}\eta^v\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\xi^u & \eta^u\\ \xi^v & \eta^v\end{vmatrix}=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\begin{vmatrix}\xi^u & \eta^u\\ \xi^v & \eta^v\end{vmatrix},$$

$$d\varphi\wedge d\psi=\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,\ d\chi\wedge d\varphi=\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,\ d\psi\wedge d\varphi=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}du\wedge dv,$$

и мы еще раз получаем формулу (5).

## 4⁰ Интеграл от 2-формы

### Определение.

1) Пусть $\omega=P\,du\wedge dv$ — дифференциальная форма в ограниченной замкнутой области $\bar\Omega\subset\mathbb{R}^2$. Область $\Omega$ ориентирована каноническим базисом пространства $\mathbb{R}^2$. Интегралом от дифференциальной формы $\omega$ по множеству $\bar\Omega$ называется двойной интеграл функции $P$ по этому множеству:

$$\iint\limits_{\bar{\Omega}} \omega = \iint\limits_{\bar{\Omega}} P du \wedge dv = \iint\limits_{\bar{\Omega}} P \quad \left( = \iint\limits_{\bar{\Omega}} P(u,v)\, du dv \right). \tag{7}$$

2) Пусть $\Phi : \bar{\Omega} \to \Sigma \subset G \subset \mathbb{R}^3$ — простая поверхность в области $G$, $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ — 2-форма в области $G$, $\omega^*$ — перенос формы в область $\Omega$. Полагаем по определению

$$\iint\limits_{\Sigma} \omega = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \omega^*. \tag{8}$$

С учетом проведенных вычислений можем написать

$$\iint\limits_{\Sigma} \omega = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \left( P \circ \Phi \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} + Q \circ \Phi \frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)} + R \circ \Phi \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \right). \tag{9}$$

или

$$\iint\limits_{\Sigma} \omega = \iint\limits_{\bar{\Omega}} \begin{vmatrix} P^* & Q^* & R^* \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Поверхностный интеграл определяется для ориентированной поверхности. Ориентация на поверхности введена отображением $\Phi$.

Для ориентированной кусочно-гладкой поверхности интеграл от дифференциальной формы определяется через сумму интегралов по простым гладким частям.

Особенно просто выглядит формула для поверхностного интеграла от дифференциальной формы $Rdx \wedge dy$ по графику $S$ функции $z = f(x,y),\ (x,y) \in E$:

$$\iint\limits_{S} Rdx \wedge dy = \iint\limits_{E} R\big(x,y,f(x,y)\big)\, dxdy\,. \tag{11}$$

Формула справедлива для интегрирования по верхней стороне графика.

В противоположность рассмотренной ситуации интеграл $Rdx \wedge dy$ по поверхности, нормаль которой параллельна плоскости $Oxy$, равен нулю:

$$\Phi : \begin{cases} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u) \\ z = v \end{cases} \qquad \iint\limits_{S} Rdx \wedge dy = 0\,. \tag{12}$$

## $5^0$ Свойства поверхностных интегралов второго рода

Интеграл от дифференциальной формы обладает свойствами линейности и аддитивности:

$$\iint\limits_{\Sigma} (\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1 \iint\limits_{\Sigma} \omega_1 + \alpha_2 \iint\limits_{\Sigma} \omega_2, \tag{13}$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \omega = \iint\limits_{\Sigma_1} \omega + \iint\limits_{\Sigma_2} \omega, \text{ если } \Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2,\ \mu(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 0\,. \tag{14}$$

Значение интеграла не изменяется при переходе к новой параметризации с сохранением ориентации и меняется на противоположное при смене ориентации.

Перейдем к новой параметризации, например, в интеграле $\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz$. По формуле замены переменных в двойном интеграле

$$\iint\limits_{\Sigma,\Phi} P dy \wedge dz = \iint\limits_{\Omega} P \circ \Phi \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} = \iint\limits_{\Omega_1} P \circ \Phi \circ \Psi \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} \right|.$$

По правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial(\psi_1,\chi_1)}{\partial(u_1,v_1)} = \frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} \frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)}.$$

Получается, что

$$\iint\limits_{\Sigma,\Phi} P dy \wedge dz = \pm \iint\limits_{\Omega_1} P \circ \Phi_1 \frac{\partial(\psi_1,\chi_1)}{\partial(u_1,v_1)} = \pm \iint\limits_{\Sigma,\Phi_1} P dy \wedge dz,$$

где знак плюс выбираем, если $\frac{\partial(u,v)}{\partial(u_1,v_1)} > 0$, т. е. если преобразование переменных $\Psi$ сохраняет ориентацию, знак минус выбираем, если ориентация меняется на противоположную.

## $6^0$ Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Пусть поверхность $\Sigma$ ориентирована единичной нормалью $\mathbf{n}(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$.

Тогда

$$\iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dz + R dx \wedge dy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu) d\sigma. \qquad (15)$$

Действительно, для направляющих косинусов имеют место формулы

$$\cos\lambda = \frac{\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}}, \cos\mu = \frac{\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}}, \cos\nu = \frac{\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Поэтому

$$\iint\limits_{\Sigma} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu) d\sigma = \iint\limits_{\Omega} (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)\sqrt{EG-F^2} =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left( P\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \right) = \iint\limits_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dz + R dx \wedge dy.$$

Применим доказанную формулу к интегрированию дифференциальной формы

$$\cos\lambda dy \wedge dz + \cos\mu dz \wedge dx + \cos\nu dx \wedge dy:$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \cos\lambda dy \wedge dz + \cos\mu dz \wedge dx + \cos\nu dx \wedge dy = \iint\limits_{\Sigma} (\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu) d\sigma = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma = \mu(\Sigma).$$

Интеграл оказался равным площади поверхности. В связи с этим форму

$$d\sigma = \cos\lambda dy \wedge dz + \cos\mu dz \wedge dx + \cos\nu dx \wedge dy \qquad (16)$$

называют дифференциальной формой площади поверхности. Обозначение $d\sigma$ согласовано с его использованием в обозначении интеграла первого рода. Запись $\iint\limits_{\Sigma} F d\sigma$ можно считать интегралом от дифференциальной формы.

# § 5. Формула Стокса

## 1⁰. Внешний дифференциал дифференциальной формы

Если $\omega = F$ — 0-форма, то внешним дифференциалом называется обычный дифференциал

$$d\omega = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz\,. \tag{1}$$

Внешним дифференциалом линейной дифференциальной формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ называется 2-форма

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz\,.$$

Поскольку

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz,$$
$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz,$$
$$dR = \frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz$$

то

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy\,. \tag{2}$$

Символически эту формулу записывают в виде определителя

$$d\omega = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Если $\omega = dF$, то $d\omega = 0$. Действительно, в этом случае

$$d\omega = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Дифференцирование линейно, сохраняется правило дифференцирования произведения:

$$d\left(F\omega\right) = dF \wedge \omega + Fd\omega\,. \tag{4}$$

(Действительно, $\omega = Pdx + Qdy + Rdz,\ F\omega = FPdx + FQdy + FRdz$,

$$d\left(F\omega\right) = d\left(FP\right) \wedge dx + d\left(FQ\right) \wedge dy + d\left(FR\right) \wedge dz =$$
$$= \left(PdF + FdP\right) \wedge dx + \left(QdF + FdQ\right) \wedge dy + \left(RdF + FdR\right) \wedge dz =$$
$$= dF \wedge \left(Pdx + Qdy + Rdz\right) + F\left(dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz\right) = dF \wedge \omega + Fd\omega).$$

## $2^0$. Перенос дифференциала

$$\Phi:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to G\subset\mathbb{R}^3 \text{ — непрерывно дифференцируемо.}$$

Отображение $\Phi$ переносит дифференциальные формы из $G$ в $\Omega$.

Если $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ , то

$$\omega^*(\xi)=\omega\big(d\Phi(\xi)\big)=P^*d\varphi(\xi)+Q^*d\psi(\xi)+R^*d\chi(\xi),$$
$$\omega^*=P^*d\varphi+Q^*d\psi+R^*d\chi.$$

Если $\omega = dF = \dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy+\dfrac{\partial F}{\partial z}dz$ , то

$$\omega^*=\frac{\partial F}{\partial x}d\varphi+\frac{\partial F}{\partial y}d\psi+\frac{\partial F}{\partial z}d\chi=d\left(F\circ\Phi\right)=d\left(F^*\right).$$

Установлена перестановочность дифференцирования и переноса для 0-формы $F$ .

Покажем, что это свойство сохраняется и для линейных форм.

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz,\ \omega^*=P^*d\varphi+Q^*d\psi+R^*d\chi\,,$$
$$d\left(\omega^*\right)=d\left(P^*\right)\wedge d\varphi+d\left(Q^*\right)\wedge d\psi+d\left(R^*\right)\wedge d\chi\,,$$

поскольку $d\left(d\varphi\right)=d\left(d\psi\right)=d\left(d\chi\right)=0$.

$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz$ . Поскольку перенос форм сохраняет внешнее произведение, то

$$\left(d\omega\right)^*=\left(dP\right)^*\wedge d\varphi+\left(dQ\right)^*\wedge d\psi+\left(dR\right)^*\wedge d\chi=d\left(P^*\right)\wedge d\varphi+d\left(Q^*\right)\wedge d\psi+d\left(R^*\right)\wedge\chi\,.$$

Мы приходим к выводу, что

$$\left(d\omega\right)^*=d\left(\omega^*\right). \tag{5}$$

## $3^0$. Формула Стокса

**Теорема 1.** Пусть

$$\Phi:\bar{\Omega}\to\Sigma\subset\mathbb{R}^3 \text{ — простая гладкая поверхность,}$$

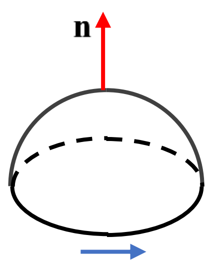
Область $\Omega$ ограничена простым кусочно-гладким контуром $\Gamma$, $\partial\Sigma=\Phi\left(\Gamma\right)$ — край поверхности $\Sigma$. На поверхности действует линейная форма $\omega$

Тогда

$$\oint_{\partial\Sigma}\omega=\iint_{\Sigma}d\omega\,. \tag{6}$$

На $\Sigma$ и на $\partial\Sigma$ выбираются согласованные ориентации: с выбранной стороны поверхности обход контура идет против часовой стрелки, при движении по контуру выбранная сторона поверхности остается слева.

$\Sigma$




Для формы $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ формула Стокса записывается в виде

$$\oint_{\partial\Sigma}Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy\,. \tag{7}$$

Часто формулу записывают в виде

$$\oint_{\partial\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma . \tag{8}$$

**Доказательство.** Перенесем форму $\omega$ в область параметров $\Omega$ и применим формулу Грина.

$$\oint_{\partial\Sigma} \omega = \oint_{\Gamma} \omega^* = \iint_{\Omega} d(\omega^*) = \iint_{\Omega} (d\omega)^* = \iint_{\Sigma} d\omega . \tag{9}$$

**Замечание-упражнение.** Пусть контур $\Gamma$ описывается параметрическими уравнениями $u = \alpha(t), v = \beta(t)$, для $\partial\Sigma$ получаются уравнения $x = \varphi(\alpha(t), \beta(t)), y = \psi(\alpha(t), \beta(t)), z = \chi(\alpha(t), \beta(t))$. Именно эти уравнения следует использовать для вычисления интеграла $\oint_{\partial\Sigma} \omega$. В ходе доказательства мы перенесли форму с помощью отображения $\Phi$ и интегрировали форму $\omega^*$. Правомерность таких действий установлена при рассмотрении вопроса о переносе линейных форм.

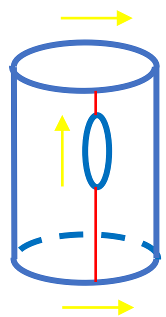
**Дополнение.** Пусть $\Sigma$ — кусочно-гладкая поверхность, край $\partial\Sigma$ которой состоит из контуров $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$; $\omega$ — линейная дифференциальная форма на $\Sigma$.

Тогда

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \iint_{\Sigma} d\omega , \tag{10}$$

при условии, что поверхность $\Sigma$ и контуры $\Delta_1, \ldots, \Delta_p$ ориентированы согласованно.

**Доказательство.** Разрежем поверхность $\Sigma$ на части $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_q$, удовлетворяющие теореме 1. Тогда для каждой части можно написать формулу Стокса



$$\int_{\Delta_i} \omega = \iint_{\Sigma_i} d\omega,\ i = 1, \ldots q .$$

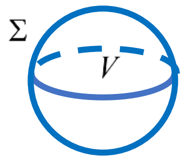
При сложении этих равенств интегралы по вспомогательным линиям взаимно уничтожатся, и мы получим формулу Стокса для всей поверхности $\Sigma$.

## § 6. Формула Остроградского-Гаусса

**Теорема 1.** Замкнутая поверхность $\Sigma$ ограничивает тело $V$,

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \text{ —} \tag{1}$$

дифференциальная форма на $V$.



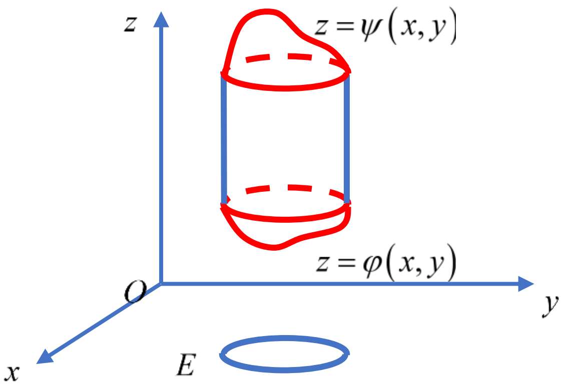

Тогда

$$\oiint_{\Sigma^+} \omega = \iiint_{V} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right), \tag{2}$$

на $\Sigma$ выбирается внешняя сторона.

**Доказательство.** Ограничимся доказательством формулы

$$\oiint_{\Sigma^+} Rdx\wedge dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (3)$$




Пусть тело $V$ имеет простейшую конструкцию:

$$V=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in E, \varphi(x,y)\le z\le \psi(x,y)\},$$

Где $\varphi,\psi$ — непрерывные функции. Край $\partial V$ тела $V$ состоит из графиков $\Sigma_\varphi,\Sigma_\psi$ функций $\varphi,\psi$ соответственно и поверхности $\Sigma_0 \perp 0xy$. На $\Sigma_\psi$ выбрана верхняя сторона, а на $\Sigma_\varphi$ — нижняя,

$$\iint_{\Sigma_0} Rdx\wedge dy = 0.$$

Представляя тройной интеграл повторным, получим

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_E dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz = \iint_E \big(R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\big)dxdy =$$

$$= \iint_{\Sigma_\psi} Rdx\wedge dy + \iint_{\Sigma_\varphi} Rdx\wedge dy = \iint_{\Sigma^+} Rdx\wedge dy,$$

что и требовалось доказать.

Более сложное тело $V$ разрезаем на простые части $V_1,\ldots,V_q$ вспомогательными поверхностями и записываем формулу Остроградского-Гаусса для каждой части:

$$\oiint_{\Sigma_i^+} Rdx\wedge dy = \iiint_{V_i} \frac{\partial R}{\partial z},\ i=1,\ldots,q. \qquad (4)$$

На вспомогательных поверхностях соседние тела индуцируют взаимно противоположные ориентации. При сложении равенств интегралы по вспомогательным поверхностям взаимно уничтожаются, оставшиеся части поверхностей формируют край $\partial V=\Sigma^+$ тела $V$ с положительной ориентацией:

$$\oiint_{\Sigma^+} Rdx\wedge dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (5)$$

Доказательство закончено.

Формулу Остроградского-Гаусса можно записать в виде

$$\oiint_{\Sigma^+} \omega = \iiint_V d\omega, \qquad (6)$$

если ввести в рассмотрение дифференциальные формы третьего порядка.

Функция $L$ трех векторных переменных, линейная по каждой переменной, называется кососимметрической, если она меняет свое значение на противоположное при транспозиции двух переменных:

$$\forall \xi,\eta,\zeta\ \ L(\xi,\zeta,\eta)=-L(\xi,\eta,\zeta), L(\zeta,\eta,\xi)=-L(\zeta,\eta,\xi), L(\eta,\xi,\zeta)=-L(\xi,\eta,\zeta). \qquad (7)$$

В трехмерном пространстве с точностью до числового множителя имеем только одну 3-форму:

$$dx \wedge dy \wedge dz : dx \wedge dy \wedge dz\left(\xi, \eta, \zeta\right) = \begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 & \zeta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 & \zeta^2 \\ \xi^3 & \eta^3 & \zeta^3 \end{vmatrix}, \tag{8}$$

Пространство 3-форм одномерно.

$dx \wedge dy \wedge dz$ — внешнее произведение линейных форм $dx, dy, dz$. Внешнее умножение линейно по каждому сомножителю и кососимметрично.

Мы скажем, что в области $G \subset \mathbb{R}^3$ определена дифференциальная форма третьего порядка, если каждой точке $w \in G$ поставлена в соответствие кососимметрическая форма $\omega\left(w\right)$.

Внешним дифференциалом дифференциальной формы второго порядка

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \tag{9}$$

называется дифференциальная форма третьего порядка

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy .$$

С учетом косой симметрии внешнего умножения для $d\omega$ получается выражение

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz . \tag{10}$$