Лекции 8 – 9 27.09–01.10.2024

Глава II. Предел функции

§ 1. Понятие предела функции

1⁰. Предельная точка.

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Точка a называется предельной для множества E, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ 0 < |x - a| < \varepsilon .$$

На языке окрестностей это означает, что любая окрестность V точки a содержит точки множества E, отличные от a.

Если V — окрестность точки a, то $\dot{V} = V \setminus \{a\}$ называют проколотой окрестностью. Теперь можно сказать, что a — предельная точка для E, если для любой окрестности V точки a проколотая окрестность $\dot{V}$ пересекается с E, $\dot{V} \cap E \neq \varnothing$.

2⁰. Определение. Предел функции

Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ — предельная точка для множества E; f — функция, определенная на E.

1) Определение на языке $\varepsilon - \delta$

Число A называется пределом функции f в точке a (или при $x \to a$) вдоль множества E, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ выполняется всякий раз, когда $x \in E$ и $0 < |x - a| < \delta$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in E \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon .$$

2) Определение на языке окрестностей

Число A называется пределом функции f в точке a, если для любой окрестности V точки A существует окрестность U точки a, для которой справедливо включение $f\left(\dot{U} \cap E\right) \subset V$.

3) Определение на языке последовательностей

Число A называется пределом функции f в точке a, если для любой последовательности $\{x_n\},\ x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ справедливо соотношение $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

Если A — предел функции f в точке a, то пишут $f(x) \underset{x\to a, x\in E}{\to} A,\ A = \lim\limits_{x \to a, x \in E} f(x)$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуацию, где функция определена, по крайней мере, в некоторой проколотой окрестности точки a. В такой обстановке указание множества E становится необязательным, мы пишем просто $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Пример

Для существования предела функция вовсе не обязана быть определенной в точке a. Если же в этой точке функция определена, то значение $f(a)$ не влияет на предел.

Если $f(x) = 1$ при $x \neq 3$, а $f(3) = 2$, то $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1 \neq f(3)$.

Существование и значение предела полностью определяется поведением функции в любой проколотой окрестности точки a. Если функции f, g совпадают в некоторой проколотой окрестности U точки a, то они имеют или не имеют предела одновременно, в случае существования пределы между собой равны.

3^0. Теорема 1. Равносильность определений.

Определения 1), 2), 3) равносильны. Если $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле одного из определений, то $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ и в смысле других определений.

Доказательство

Сначала сравним определения 1), 2).

Пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле 1). Возьмем произвольную окрестность V точки A. Найдется такое $\varepsilon > 0$, что $V_\varepsilon(A) \subset V$. По определению 1) существует такое $\delta > 0$, что

$$x \in E,\ x \neq a,\ |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Полагая $U = V_\delta(a)$, можно переписать предыдущее соотношение в виде $f(\dot{U} \cap E) \subset V_\varepsilon(A) \subset V$. Таким образом, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле 2).

Наоборот, пусть $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле 2). Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $V = V_\varepsilon(A)$. По определению 2) найдется окрестность U точки a, для которой $f(\dot{U} \cap E) \subset V$. Подберем $\delta > 0$, для которого $V_\delta(a) \subset U$. Теперь

$$\forall x \in E\ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon ,$$

$A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле 1). Установлена равносильность определений 1), 2).

Докажем равносильность определений 1), 3).

Пусть $A=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ в смысле 1). Возьмем произвольную последовательность

$$\left\{x_n\right\},\ x_n \neq a,\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$$

и убедимся в том, что $f\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. По определению 1) найдется такое $\delta>0$, что

$$\forall x\in E\ \ 0<\left|x-a\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon .$$

По определению предела последовательности найдется номер N , для которого

$$n>N \Rightarrow \left|x_n-a\right|<\delta \text{, при этом } x_n \neq a .$$

Видим, что при $n>N$ выполняется соотношение $\left|f\left(x_n\right)-A\right|<\varepsilon$. Итак, $f\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} A$.

$A=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ в смысле 3).

Пусть $A=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ в смысле 3). Допустим, A не является пределом в смысле 1). Тогда

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x\in E\ \ 0<\left|x-a\right|<\delta\ \left|f\left(x\right)-A\right|\geq\varepsilon .$$

В качестве $\delta>0$ последовательно возьмем числа $\dfrac{1}{n},\ n=1,\ 2,\ \ldots$ и найдем точки

$x_n\in E\ \ 0<\left|x_n-a\right|<\dfrac{1}{n},\ \left|f\left(x_n\right)-A\right|\geq\varepsilon$. Тем самым мы получаем последовательность $\left\{x_n\right\}$.

Неравенство $\left|x_n-a\right|<\dfrac{1}{n}$ означает, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, а неравенство $\left|f\left(x_n\right)-A\right|\geq\varepsilon$ говорит, что A не является пределом для $\left\{f\left(x_n\right)\right\}$, вопреки предположению. Полученное противоречие заставляет нас признать, что $A=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$ в смысле 1).

§ 2 Различные предельные конструкции

1^0. Односторонние пределы

1) Пусть f определена на некотором интервале $\left(a-\delta_0,\ a\right)$.

Число A называется левосторонним пределом функции f в точке a ($A=f\left(a-0\right),\ A=\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right), f\left(x\right) \underset{x\to a-0}{\to} A$), если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall x\ \ a-\delta<x<a \Rightarrow \left|f\left(x\right)-A\right|<\varepsilon .$$

2) Пусть f определена на некотором интервале $(a,\ a+\delta_0)$.

Число A называется правосторонним пределом функции f в точке a
($A = f(a+0),\ A = \lim\limits_{x\to a+0} f(x), f(x) \underset{x\to a+0}{\to} A$), если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \ \forall x\ a < x < a+\delta \Rightarrow \left|f(x) - A\right| < \varepsilon .$$

Определения односторонних пределов можно дать и в терминах окрестностей или последовательностей.

Предложение

Функция f определена в проколотой окрестности точки a.

Тогда функция имеет предел в точке a в том и только в том случае, если существуют и равны между собой односторонние пределы $f(a-0) = f(a+0)$. В случае существования предела

$$f(a-0) = f(a+0) = \lim_{x\to a} f(x).$$

2⁰. Бесконечные пределы

В определении предела число A можно заменить на $+\infty, -\infty,\ \infty$. Например,

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{E} > 0\ \exists\delta > 0\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow\ f(x) < -\mathrm{E} .$$

3⁰. Пределы на бесконечности

Бесконечности могут выполнять и роль точки, в которой вычисляется предел. Например,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \infty \Leftrightarrow \forall \mathrm{E} > 0\ \exists\Delta > 0\ \ x > \Delta \Rightarrow \left|f(x)\right| > \mathrm{E} .$$

§ 3 Простейшие свойства предела функции

1^0. Если функция постоянна в некоторой проколотой окрестности точки a, $f(x) = A$ при $x \in \dot{V}$, то $f(x) \underset{x\to a}{\to} A$.

2^0. Предел единствен.

3^0. Если функция имеет конечный предел, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности.

§ 4. Предел и арифметические операции

Теорема 1

Пусть функции $f,\ g$ определены в проколотой окрестности E точки a.

$$f(x) \underset{x \to a}{\to} A,\ \ g(x) \underset{x \to a}{\to} B.$$

Определим функции

$$\begin{aligned} &F : F(x) = f(x) + g(x),\ x \in E; \\ &G : G(x) = f(x) g(x),\ x \in E; \\ &H :\ H(x) = f(x) / g(x),\ x \in E. \end{aligned}$$

(В последнем случае предполагаем, что $g(x) \neq 0$ при $x \in E$).

Тогда функции $F,\ G,\ H$ тоже имеют пределы,

$$F(x) \underset{x \to a}{\to} A + B,\ G(x) \underset{x \to a}{\to} AB,\ H(x) \underset{x \to a}{\to} A / B$$

(последнее при условии $B \neq 0$).

Доказательство

Докажем , например, последнее утверждение.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\},\ x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$. По определению предела функции на языке последовательностей

$$f(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} A,\ \ g(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} B.$$

По теореме о пределе отношения последовательностей $H(x_n) \underset{n \to \infty}{\to} \dfrac{A}{B}$. Опять по определению предела функции $H(x) \underset{x \to a}{\to} \dfrac{A}{B}$.

§ 5. Предел и неравенства

Теорема 1

Пусть функции $f,\ g$ определены в проколотой окрестности E точки a .

1) Стабилизация неравенств

Пусть

$$f(x) \underset{x \to a}{\to} A,\ \ g(x) \underset{x \to a}{\to} B,\ A < B.$$

Тогда

$$\exists U\ \ \forall x \in \dot{U}\ \ f(x) < g(x)$$

2) Предельный переход в неравенстве.

Пусть

$$\forall x \in E \;\; f(x) \le g(x),$$

$$f(x) \underset{x \to a}{\to} A, \;\; g(x) \underset{x \to a}{\to} B.$$

Тогда

$$A \le B.$$

Замечание. Можно ослабить условие и потребовать выполнения неравенства $f(x) \le g(x)$ в некоторой проколотой окрестности точки a.

3) Теорема о полицейских.

Если

$$\forall x \in E \;\; f(x) \le h(x) \le g(x),$$

$$f(x) \underset{x \to a}{\to} A, \;\; g(x) \underset{x \to a}{\to} A,$$

то

$$h(x) \underset{x \to a}{\to} A.$$

Доказательство

1) Рассмотрим окрестности $V_A = \left(-\infty, \dfrac{A+B}{2}\right)$ и $V_B = \left(\dfrac{A+B}{2}, +\infty\right)$ точек A и B соответственно. На основании определения предела мы можем найти такую окрестность U точки a, что при $x \in \dot{U}$ справедливы включения $f(x) \in V_A$ и $g(x) \in V_B$. U — искомая окрестность. (Поскольку из $f(x) \in V_A$ следует, что $f(x) < \dfrac{A+B}{2}$, а $g(x) \in V_B$ влечет $g(x) > \dfrac{A+B}{2}$, то $f(x) < g(x)$).

2) Утверждение о предельном переходе в неравенстве доказывается, как и в случае последовательностей, методом от противного.

Допустив, что имеет место неравенство $A > B$, мы придем к противоречащему условию выводу о том, что в пределах некоторой проколотой окрестности точки a выполняется неравенство $f(x) > g(x)$.

3) Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$, $x_n \ne a$, $x_n \underset{n \to \infty}{\to} a$.

По определению предела на языке последовательностей получаем соотношения $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A,\ g(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$, а по условию $f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n),\ n = 1, 2, \ldots$ По теореме о полицейских для последовательностей $h(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} A$. Пользуясь опять определением на языке последовательностей, делаем вывод, что $h(x) \underset{x\to a}{\to} A$.

§ 6. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

1⁰. Определение

Функция α называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.

2⁰. Теорема 1.

1) Сумма бесконечно малых является бесконечно малой.

2) Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию является бесконечно малой.

3⁰. Теорема 2. Определение предела в терминах бесконечно малых

$$f(x) \underset{x\to a}{\to} A \Leftrightarrow \alpha = f - A - \text{б.м.}$$

4⁰. Бесконечно большие функции

Функция f называется бесконечно большой ($f(x) \underset{x\to a}{\to} \infty$), если

$$\forall \mathrm{E} > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \mathrm{E}.$$

Теорема 3.

$$\alpha\ -\ \text{б.м.}\ \Leftrightarrow\ f = \frac{1}{\alpha} - \textit{б.б.}$$

§ 7. Сравнение функций (бесконечно малых)

1⁰. Определение

Пусть функции α, β определены в некоторой проколотой окрестности точки a, β не обращается в 0 ни в одной точке.

1) Говорят что α, β одного порядка при $x \to a$, если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \underset{x\to a}{\to} A \ne 0, \infty.$$

Для бесконечно малых функций α, β в этом случае говорят, что функция α и β одного порядка малости.

2) $\alpha,\ \beta$ эквивалентны при $x\to a$, $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta(x)$, если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\underset{x\to a}{\to}1.$$

Замечание. В условиях пункта 1) $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}A\beta(x)$.

3) Функция α называется бесконечно малой по сравнению с β, $\alpha(x)\underset{x\to a}{=}o\big(\beta(x)\big)$ (α есть о-малое от β), если

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\underset{x\to a}{\to}0.$$

Для бесконечно малых функций $\alpha,\ \beta$ в этом случае говорят, что функция α имеет более высокий порядок малости, чем β.

В смысле принятого определения запись $\alpha=o(1)$ означает бесконечную малость функции α.

4) $\alpha\underset{x\to a}{=}\mathrm{O}(\beta)$, если $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки a.

Примеры. $x+2x^2\underset{x\to 0}{\sim}x,\ x^2\underset{x\to 0}{=}o(x)$.

2⁰. Определение

1) Если $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}A\big(\beta(x)\big)^k$, то говорят, что α имеет k-й порядок относительно β.

2) Если $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}A(x-a)^k$, то α имеет k-й порядок малости, функция $A(x-a)^k$ называется главной частью б.м. α. (Для случая $x\to\infty$ роль основной б.м. выполняет функция $\dfrac{1}{x}$, функция $\alpha(x)\underset{x\to\infty}{\sim}\dfrac{A}{x^k}$ имеет k-й порядок малости, имеет $\dfrac{A}{x^k}$ своей главной частью).

3⁰. Теорема 1

При вычислении пределов **сомножители** можно заменять на эквивалентные.

Пусть $\alpha(x)\underset{x\to a}{\sim}\alpha_1(x),\ \beta(x)\underset{x\to a}{\sim}\beta_1(x)$.

Тогда

1) Если $\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\underset{x\to a}{\to}A$, то $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\underset{x\to a}{\to}A$.

2) Если $\alpha_1(x)\beta_1(x)\underset{x\to a}{\to} A$, то $\alpha(x)\beta(x)\underset{x\to a}{\to} A$.

3) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\underset{x\to a}{\sim}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

4) $\alpha(x)\beta(x)\underset{x\to a}{\sim}\alpha_1(x)\beta_1(x)$.

Доказательство.

1) $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\dfrac{\beta_1(x)}{\beta(x)}\underset{x\to a}{\to} A\cdot 1\cdot 1=A$.

4) $\dfrac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)}=\dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}\underset{x\to a}{\to} 1\cdot 1=1$.

4⁰. Теорема 2. Условие эквивалентности.

$$\alpha\sim\beta \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix}\alpha-\beta=o(\beta)\\ \alpha=\beta+o(\beta)\end{matrix}$$

Доказательство.

$$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}\to 1\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\beta}-1\to 0\Leftrightarrow\frac{\alpha-\beta}{\beta}\to 0\Leftrightarrow\alpha-\beta=o(\beta).$$

5⁰. Таблица эквивалентных б.м.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$	$\sin x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$	$\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{\sim} x$	$\operatorname{tg} x\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$	$1-\cos x\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{1}{2}x^2$	$\cos x\underset{x\to 0}{=}1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x)\underset{x\to 0}{=} x+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a x}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$	$\log_a(1+x)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{\ln a}$	$\log_a(1+x)\underset{x\to 0}{=}\dfrac{x}{\ln a}+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$	$e^x-1\underset{x\to 0}{\sim} x$	$e^x\underset{x\to 0}{=}1+x+o(x)$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$	$a^x-1\underset{x\to 0}{\sim}x\ln a$	$a^x\underset{x\to 0}{=}1+x\ln a+o(x)$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$	$(1+x)^\mu-1\underset{x\to 0}{\sim}\mu x$	$(1+x)^\mu\underset{x\to 0}{=}1+\mu x+o(x)$

6⁰. Операции с "o".

1) Если $\beta_1,\ \beta_2$ одного порядка, то $o(\beta_1)=o(\beta_2)$.

2) $o(\beta)\pm o(\beta)=o(\beta)$.

Равенство следует понимать как утверждение:

Если $\alpha_1=o(\beta)$ и $\alpha_2=o(\beta)$, то $\alpha_1\pm\alpha_2=o(\beta)$.

3) $\gamma\cdot o(\beta)=o(\gamma\beta),\ o(\gamma)\cdot o(\beta)=o(\gamma\beta)$.

4) Если $\alpha=o(\beta),\ \beta=o(\gamma)$, то $\alpha=o(\gamma)$.

Действительно, $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}\dfrac{\beta}{\gamma}\to 0\cdot 0=0$.

Примеры. $x^3\underset{x\to 0}{=}o(x^2),\ x^2\underset{x\to 0}{=}o(x)$, поэтому $x^3\underset{x\to 0}{=}o(x)$, иными словами $o(x^2)\underset{x\to 0}{=}o(x)$.
Отметим, что в последнем "равенстве" нельзя менять местами левую и правую части.

7⁰. Пример

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+3x}}{x}$$

$$e^x=1+x+o(x);$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x+o(x);$$

$$e^x\sqrt{1+x}=1+\frac{3}{2}x+o(x);$$

$$\sqrt[3]{1+3x}=1+x+o(x);$$

$$e^x\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+3x}=\frac{1}{2}x+o(x)\sim\frac{1}{2}x$$

Ответ. $\dfrac{1}{2}$.

8⁰. Замечание. В проведенных построениях можно отказаться от условия необращения функции β в нуль.

Новые определения

$$\alpha = o(\beta) \Leftrightarrow \exists\varphi\ \varphi \to 0,\ \alpha = \varphi\beta;$$
$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \exists\varphi\ \varphi \to 1,\ \alpha = \varphi\beta.$$

§ 8. Предел монотонной функции

Определение

Пусть f — функция, определенная на промежутке Δ.

1) Функция f называется возрастающей (строго возрастающей), если

$$\forall x, y \in \Delta\ x < y \Rightarrow f(x) \le f(y)\ \big(f(x) < f(y)\big).$$

2) Функция f называется убывающей (строго убывающей), если

$$\forall x, y \in \Delta\ x < y \Rightarrow f(x) \ge f(y)\ \big(f(x) > f(y)\big).$$

3) Функция называется (строго) монотонной, если она (строго) возрастает или (строго) убывает

Теорема 1.

Пусть f — монотонная функция на интервале (a, b).

Тогда существуют односторонние пределы $f(a+0),\ f(b-0)$, может быть, бесконечные.

Доказательство.

Для определенности рассмотрим возрастающую функцию.

1) Пусть f ограничена сверху. Положим $M = \sup f(a, b)$ и покажем, что $f(x) \underset{x \to b-0}{\to} M$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется такой $x_0 \in (a, b)$, что $f(x_0) > M - \varepsilon$.

Положим $\delta = b - x_0$. Теперь, $\forall x \in (b-\delta, b)$ имеет место неравенство $x > b - \delta = x_0$, поэтому $f(x) \ge f(x_0) > b - \varepsilon$, $M - \varepsilon < f(x) \le M$. Видим, что $f(x) \underset{x \to b-0}{\to} M$.

2) В случае неограниченности $f(x) \underset{x \to b-0}{\to} +\infty$.

Действительно, $\forall \mathrm{E} > 0\ \exists x_0\ \ f(x_0) > \mathrm{E}$. Далее, $\forall x \in (x_0, b)\ \ f(x) \ge f(x_0) > \mathrm{E}$.

§ 9. Критерий Коши существования предела

Теорема 1.

Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ необходимо и достаточно условие Коши

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ 0<|x'-a|,|x''-a|<\delta\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Доказательство.

1) Необходимость. Пусть $f(x)\underset{x\to a}{\to}A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Найдется такое $\delta>0$, что

$$0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любых $x',\ x''$, удовлетворяющих условиям $0<|x'-a|,|x''-a|<\delta$ получается неравенство

$$|f(x')-f(x'')|=|(f(x')-A)-(f(x'')-A)|\le|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

2) Достаточность. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и подберем $\delta>0$, о котором идет речь в условии Коши.

Для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $x_n\to a$ и $x_n\ne a$, найдется такой номер N , что

$$n>N\Rightarrow 0<|x_n-a|<\delta.$$

Получается, что

$$\forall n,\ m>N\ |f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon.$$

Последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная, следовательно, она сходится. Осталось убедиться в том, что все такие последовательности имеют один и тот же предел. Пусть последовательности $\{x_n'\},\ \{x_n''\}$ имеют предел a и состоят из членов, отличных от a. Построим последовательность $\{x_n\}$, полагая $x_{2n-1}=x_n',\ x_{2n}=x_n''$. Тогда $x_n\underset{n\to\infty}{\to}a,\ x_n\ne a$, поэтому существует $A=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$. По теореме о пределе подпоследовательности $f(x_n'),\ f(x_n'')\underset{n\to\infty}{\to}A$.