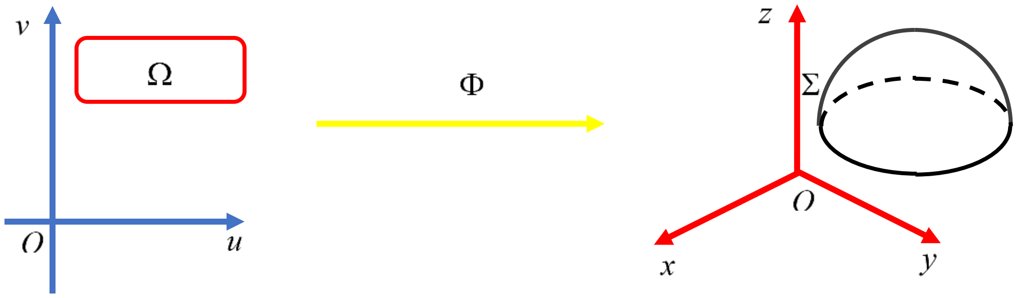
Глава IV. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Гладкие поверхности

1^0. Простые гладкие поверхности. Пусть Ω — ограниченная область в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ — граница области Ω.

$$\Phi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \text{ —}$$

непрерывно дифференцируемое инъективное отображение (замкнутой области) $\bar{\Omega}$ в пространство $\mathbb{R}^3$. (Непрерывная дифференцируемость на $\bar{\Omega}$ по определению означает непрерывную дифференцируемость на некотором открытом множестве $G \supset \bar{\Omega}$).



Пусть φ, ψ, χ — координатные функции отображения Φ. Отображение Φ описывают формулами

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \in \bar{\Omega}. \tag{1}$$

Уравнения (1) записывают и в векторной форме

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v),\ (u,v) \in \bar{\Omega},\\ &\mathbf{r}(u,v) = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Отображение Φ и множество $\Sigma = \Phi(\bar{\Omega})$ называется *простой непрерывно дифференцируемой поверхностью*, а соотношения (1) — параметрическими уравнениями этой *поверхности*.

Если в каждой точке $(u,v) \in \bar{\Omega}$ ранг функциональной матрицы

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\chi}{\partial u} & \dfrac{\partial\chi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

равен двум, то отображение Φ называется гладким, а множество $\Sigma = \Phi(\bar{\Omega})$ — *простой гладкой поверхностью* в $\mathbb{R}^3$. Именно такие поверхности будут основным предметом наших построений.

Край поверхности. Пусть граница $\partial\Omega$ области Ω представляет собой один или несколько простых гладких (или кусочно-гладких) контуров. Образ $\partial\Sigma = F\left(\partial\Omega\right)$ границы области Ω называется краем простой поверхности Σ.

Если граница области Ω — контур $\Gamma : x = \xi\left(t\right), y = \eta\left(t\right), t \in \left[\alpha, \beta\right]$, то $\partial\Sigma$ имеет параметрические уравнения

$$x = \varphi\left(\xi\left(t\right), \eta\left(t\right)\right), y = \psi\left(\xi\left(t\right), \eta\left(t\right)\right), z = \chi\left(\xi\left(t\right), \eta\left(t\right)\right).$$

Явное уравнение поверхности График непрерывно дифференцируемой на замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ функции f есть *простая гладкая поверхность*, определяемая параметрическими уравнениями $x = u, y = v, z = f\left(u, v\right), \left(u, v\right) \in \bar{\Omega}$.. Уравнение этой поверхности принято записывать в виде

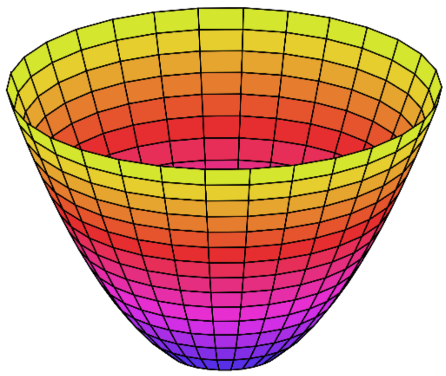
$$z = f\left(x, y\right), \left(x, y\right) \in \bar{\Omega}. \qquad (2)$$

(2) — явное уравнение поверхности.

Здесь

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

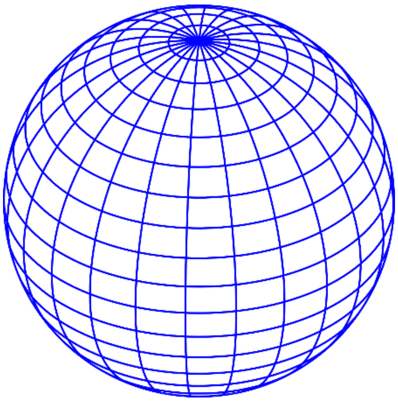
Пример 1. Часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$, — простая поверхность, окружность $x^2 + y^2 = z = 1$ — край этой поверхности.



Пример 2. Сфера S радиуса a с центром в начале координат определяется неявным уравнением $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, из которого можно выразить x, y или z и записать явные уравнения для полусфер (например, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ — явное уравнение верхней полусферы).
Параметрические уравнения получаем введением в пространстве сферических координат:

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, y = a\sin\varphi\cos\psi, z = a\sin\psi, 0 \le \varphi \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}.$$

Определенное предыдущими формулами отображение Φ не является инъекцией.



Образами отрезков $\varphi=\varphi_0, -\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$ являются меридианы, а образами отрезков $\psi=\psi_0, 0\le\varphi\le 2\pi \left(|\psi_0|<\frac{\pi}{2}\right)$ — параллели на сфере.

Меридианы $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ совпадают, а отрезки $\psi=\pm\frac{\pi}{2},\ 0\le\varphi\le 2\pi$ переходят в Северный и Южный полюсы сферы.

Отмеченные «неприятности» сосредоточены на множестве нулевой меры и не помешают построению интегралов.

Пример 3. Конус $K: x^2+y^2=z^2, 0\le z\le H$. Параметрические уравнения запишем в форме

$$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=r; 0\le\varphi\le 2\pi, 0\le r\le H.$$

Мы опять видим нарушение взаимной однозначности: отрезок $r=0, 0\le\varphi\le 2\pi$ отображается в вершину конуса, а образы лучей $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$ совпадают.

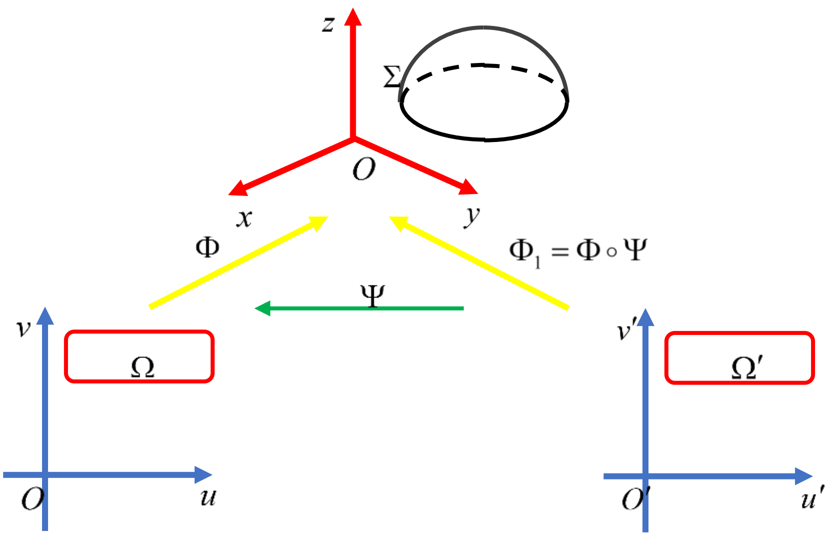
2⁰. Замена переменных. Пусть

$$\Sigma: x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),\ (u,v)\in\bar{\Omega} \text{ —}$$

простая гладкая поверхность, а

$$\Psi:\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega} \text{ —}$$

непрерывно дифференцируемая биекция $\bar{\Omega}'$ на $\bar{\Omega}$, якобиан J которой не обращается в нуль ни в одной точке $\bar{\Omega}'$.



Для поверхности Σ можем записать «новые» параметрические уравнения

$$\Sigma : x = \varphi_1(u,v),\ y = \psi_1(u,v),\ z = \chi_1(u,v),\ (u,v) \in \bar{\Omega}_1,$$

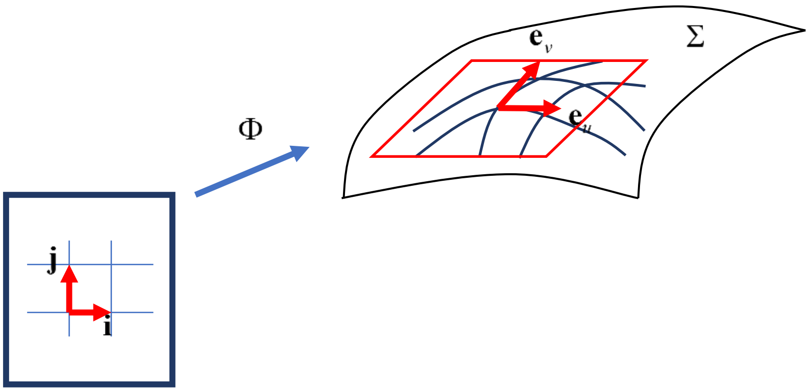
где $\varphi_1 = \varphi \circ \Psi, \psi_1 = \psi \circ \Psi, \chi_1 = \chi \circ \Psi$.

Переход от «старой» параметризации к «новой» называется заменой переменных в параметрических уравнениях поверхности.

3[0]. Криволинейные координаты на поверхности. Пусть

$$\Sigma : x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \in \bar{\Omega} \text{ —}$$

простая поверхность. Пусть прямая $u = u_0$ пересекается с $\bar{\Omega}$ по отрезку $u = u_0, \alpha \le v \le \beta$. Образ этого отрезка при отображении Φ есть кривая



$$x = \varphi(u_0,v), y = \psi(u_0,v), z = \chi(u_0,v);\ \alpha \le v \le \beta,$$

лежащая на поверхности Σ. Она называется координатной линией $u = u_0$. Придавая u_0 все возможные значения получим семейство координатных линий $u = const$. Аналогично строим семейство линий $v = const$.

Каждая точка A_0 поверхности однозначно определяется как пересечение двух координатных линий $u = u_0, v = v_0$. Числа u_0, v_0 называются криволинейными координатами точки A_0 (в криволинейной системе координат, введенной на поверхности конкретной параметризацией).

Например, для сферы в сферических координатах координатными линиями будут меридианы и параллели.

Для прямого кругового цилиндра

$$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = h$$

Координатными линиями будут образующие цилиндра, т. е. прямые $(x = x_0 = a\cos\varphi_0, y = y_0 = a\sin\varphi_0, z = h, -\infty < h < +\infty)$, и окружности $x^2 + y^2 = a^2, z = h_0$.

Если $\mathbf{r}(u,v) = \varphi(u,v)\mathbf{i} + \psi(u,v)\mathbf{j} + \chi(u,v)\mathbf{k}$ — вектор-функция, отвечающая выбранной параметризации поверхности Σ, то $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ — ненулевые неколлинеарные векторы (поскольку ранг отображения Φ равен двум). $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ — касательные векторы координатных линий. Координатные линии — гладкие кривые.

4⁰. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Продолжим рассмотрение простой поверхности Σ. Рассмотрим точку A на поверхности. Вектор $\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, векторное произведение векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, называется нормалью поверхности Σ в точке A. Для вектора нормали можем записать координатное представление

$$\mathbf{N}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix}\frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Обычно эту формулу записывают короче:

$$\mathbf{N}=\frac{\partial(\psi,\chi)}{\partial(u,v)}\mathbf{i}+\frac{\partial(\chi,\varphi)}{\partial(u,v)}\mathbf{j}+\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\mathbf{k}$$

Вектор нормали связан с конкретной параметризацией, однако направление вектора нормали при замене переменных не меняется или меняется на противоположное.

Действительно, пусть $\mathbf{r}_1=\varphi_1\mathbf{i}+\psi_1\mathbf{j}+\chi_1\mathbf{k}$ — вектор-функция новой параметризации. Тогда

$$\mathbf{N}_1=\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1}.$$

Поскольку — вектор-функция новой параметризации записывается в виде $\mathbf{r}_1=\mathbf{r}\circ\Psi$, то

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u_1},\qquad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v_1}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1},$$

$$\mathbf{N}_1=\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}-\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}\right)=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}J,$$

где $J=\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}-\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1}$ — якобиан отображения Ψ. Векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}_1$ оказываются коллинеарными. Они имеют одинаковые направления (если $J>0$) или противоположные (если $J<0$).

Вектор нормали к простой поверхности Σ в точке A ортогонален ко всем гладким кривым, лежащим на поверхности и проходящим через эту точку.

Действительно, такая кривая есть образ некоторой гладкой кривой

$$u=\xi(t),y=\eta(t)$$

в области Ω под действием отображения Φ. Параметрические уравнения кривой на поверхности записываются в виде

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(\xi(t),\eta(t)).$$

Касательный вектор этой кривой есть

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\xi' + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\eta' \;—$$

линейная комбинация векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, ортогональных $\mathbf{N}$, так что и этот вектор $\boldsymbol{\tau}$ ортогонален $\mathbf{N}$.

Определение. Плоскость, проходящая через точку A и ортогональная вектору нормали $\mathbf{N}$, называется касательной плоскостью поверхности Σ в точке A.

Касательная плоскость параллельна векторам $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Если (X, Y, Z) — координаты точки касательной плоскости, $\mathbf{R}$ — радиус вектор этой точки, а $\mathbf{R}_0$ — радиус вектор точки A, то смешанное произведение векторов $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ равно нулю.

$$\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0 \;—$$

векторное уравнение касательной плоскости.

В координатах уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим ситуацию, где поверхность Σ — график непрерывно дифференцируемой функции f.

$$\Sigma : z = f(x, y).$$

Уравнение касательной плоскости принимает вид

$$\begin{vmatrix} X - X_0 & Y - Y_0 & Z - Z_0 \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,\; Z - Z_0 = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (X - X_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (Y - Y_0) = 0.$$

Мы видим уравнение, которое было получено раньше на основе иного определения касательной плоскости как плоскости, наилучшим образом приближающей график.

Касательная плоскость состоит из касательных векторов, отложенных от точки A, является множеством значений дифференциала

$$d\Phi(u_0, v_0) : d\Phi(u_0, v_0)(\Delta u, \Delta v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v.$$

5^0. Кусочно-гладкие поверхности. Простая гладкая поверхность — гладкий взаимно однозначный образ плоской области. Многие объекты, которые мы привыкли считать поверхностями, (сфера, граница куба) простыми поверхностями не являются.

Множество Σ назовем кусочно-гладкой поверхностью, если ее можно разрезать на несколько простых гладких поверхностей $\Sigma_1,\dots,\Sigma_p$. Можно сказать еще, что Σ склеена из $\Sigma_1,\dots,\Sigma_p$. Склеивание выполняется по некоторым частям краев $\Gamma_1=\partial\Sigma_1,\dots,\Gamma_p=\partial\Sigma_p$ поверхностей $\Sigma_1,\dots,\Sigma_p$. По каждому участку склеиваются в точности две поверхности. Склеивание может выполняться гладко. Например, сфера получается гладким склеиванием простых поверхностей. В таком случае Σ называется гладкой поверхностью. В противном случае говорят о существенной кусочной гладкости. Граница куба — кусочно-гладкая поверхность. Если все линии $\Gamma_1,\dots,\Gamma_p$ оказываются задействованы в склеиваниях получается поверхность без края, которую называют еще замкнутой поверхностью.

6^0. Ориентация пространства и поверхности. В пространстве $\mathbf{R}^k$ переход от одного базиса $\mathbf{e_1,\dots,e}_k$ к другому $\mathbf{e'_1,\dots,e'}_k$ осуществляется посредством квадратной матрицы $\left(a_j^i\right)$, возникающей из разложений $\mathbf{e}'_j=a_j^i\mathbf{e}_i$. Определитель этой матрицы отличен от нуля. Базис, перенесенный в некоторую точку пространства, называется репером. Все базисы (реперы) пространства разбиваются на два класса. Реперы относятся к одному классу, если матрица перехода имеет положительный определитель. Переход к реперу противоположного класса описывается матрицей с отрицательным определителем. Каждый из классов называется ориентацией пространства. Задать ориентацию пространства — значит указать один из этих классов. Ориентированное пространство $\mathbf{R}^k$ — это пространство $\mathbf{R}^k$ с фиксированным репером.

Если $e_1,\dots,e_k$ — базис, то базисы $e_2,e_1,\dots,e_k$; $(-e_1),e_2,\dots,e_k$ имеют противоположную ему ориентацию.

По умолчанию ориентируем $\mathbb{R}^k$ с помощью канонического базиса $\mathbf{e_1}=(1,0,\dots,0)\mathbf{,\dots,e}_k=(0,0,\dots,1)$.

Ориентацию можно описать с равным успехом и на языке систем координат.

Для $k=1$ ориентация — это одно из двух возможных направлений на прямой.

Рассмотрим путь γ в пространстве $\mathbb{R}^3$ или $\mathbb{R}^2$. На носителе пути определяется направление от начала пути к концу. Тем самым носитель пути оказывается ориентированным. Отображение γ переносит ориентацию с параметрического отрезка на носитель пути.

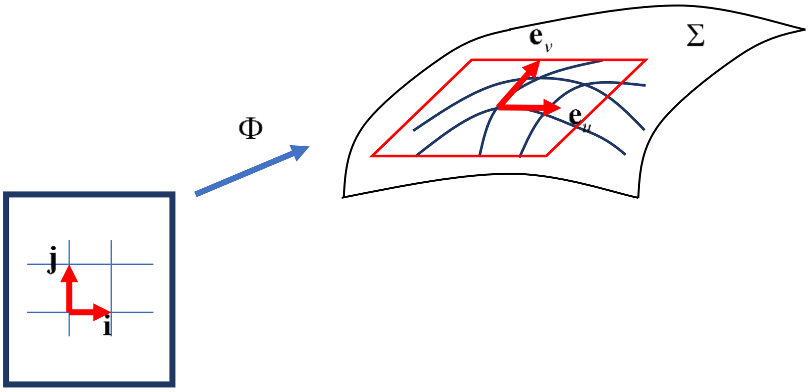
Обсудим подробнее ориентацию двумерного пространства $\mathbb{R}^2$ и двумерной поверхности $\Sigma\subset\mathbb{R}^3$

Векторы $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Этот базис называют каноническим. Переход к другому базису описывается невырожденной матрицей. Базисы можно разбить на два класса: к первому классы отнесем базисы, переход к которым описывается матрицей с положительным определителем, ко второму — те, которым отвечает матрица с отрицательным определителем. Эти классы вводят в $\mathbb{R}^2$ ориентацию. По умолчанию рассматриваем ориентацию, связанную с каноническим базисом. Эту ориентацию называют положительной. Принято располагать координатные оси так, что ось ординат получается поворотом оси абсцисс против хода часовой стрелки. Канонический базис изображается парой векторов $\mathbf{i},\mathbf{j}$, в которой вектор $\mathbf{j}$ получается из $\mathbf{i}$ поворотом против часовой стрелки. С положительной ориентацией плоскости связывают обход замкнутых контуров в направлении против хода часовой стрелки. Контур Δ, на котором выбрано положительное направление обозначают через Δ^+. Если контур Δ ограничивает область Ω, то при положительном обходе контура область остается слева.

Пусть

$$\Phi:\bar{\Omega}\to\Sigma\subset\mathbb{R}^3 \text{ —}$$

простая гладкая поверхность. Отображение Φ переносит ориентацию из параметрической области Ω на поверхность. Репер (базис, перенесенный в некоторую точку пространства) $\mathbf{i},\mathbf{j}$ плоскости переносится в репер $\mathbf{e}_u=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u},\mathbf{e}_v=\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$ касательной плоскости поверхности Σ. В каждой точке поверхности построен репер. Говорят, что на поверхности определено непрерывное поле реперов, ориентирующее поверхность. С полем реперов связаны поля нормалей



$$\mathbf{N}=\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v \text{ и единичных нормалей } \mathbf{n}=\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|},$$

которые тоже можно использовать для ориентации поверхности. Простая поверхность Σ допускает две взаимно противоположных ориентации посредством нормалей $\mathbf{n}$ и $(-\mathbf{n})$ соответственно. Выбор нормали означает выбор стороны поверхности. Так, для графика $\Sigma: z=f(x,y)$ функции двух переменных нормаль $\mathbf{N}=\left(-\dfrac{\partial f}{\partial x},-\dfrac{\partial f}{\partial y},1\right)$ отвечает верхней стороне графика, а $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y},-1\right)$ — нижней стороне.

При замене переменных ориентация поверхности сохраняется, если преобразование параметров имеет положительный якобиан, и меняется на противоположную в случае отрицательного якобиана.

Ориентация поверхности порождает ориентацию замкнутых контуров на поверхности и ориентацию края. По контурам следует двигаться в направлении против хода часовой стрелки при наблюдении с выбранной стороны поверхности изнутри контура, при этом выбранная сторона поверхности остается слева.

Ориентация кусочно-гладкой поверхности состоит в согласованной ориентации гладких частей. Гладкие части, склеенные по линии Γ называются согласованно ориентированными, если их ориентации порождают взаимно противоположные ориентации на Γ.

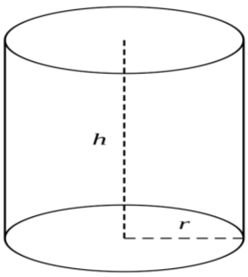
Не всякая поверхность допускает ориентацию. Если поверхность допускает ориентацию, она называется ориентируемой (двусторонней), в противном случае — неориентируемой (односторонней).

Важным примером ориентируемой поверхности является замкнутая поверхность, ограничивающая область в $\mathbb{R}^3$. Эта поверхность имеет внешнюю сторону, внешнюю нормаль и внутреннюю нормаль. Ориентация поверхности внешней нормалью называется положительной.

ПРИМЕР.

Рассмотрим две поверхности, получаемые склеиванием двух противоположных сторон прямоугольника. Склеивание проводим в соответствии со стрелками.

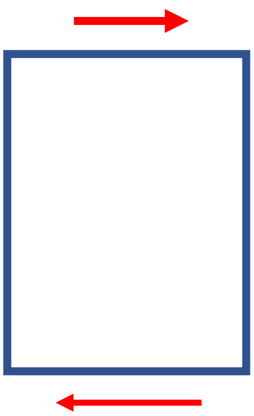
В первом случае мы получаем цилиндр.

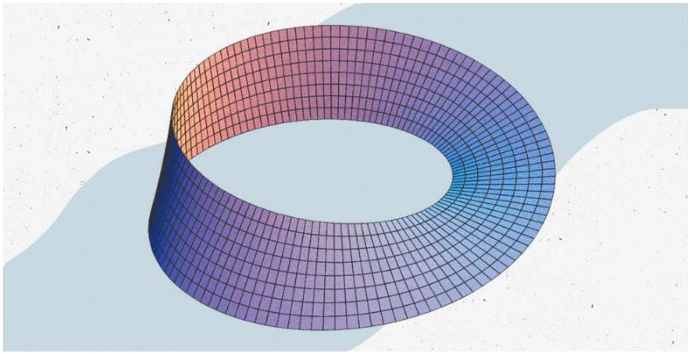


Край цилиндра состоит из двух окружностей. Как видим, край линейно связной поверхности может не обладать свойством линейной связности. Ориентируемая поверхность, состоящая из m компонент, имеет 2^m ориентаций, но только одна ориентация согласуется с ориентацией основной поверхности.

Если выбрать внешнюю сторону цилиндра, то по верхней окружности следует двигаться по часовой стрелке, по нижней — против часовой стрелки.

В качестве примера односторонней поверхности можно привести лист Мебиуса, который получается склеиванием противоположных сторон прямоугольника в соответствии со стрелками.

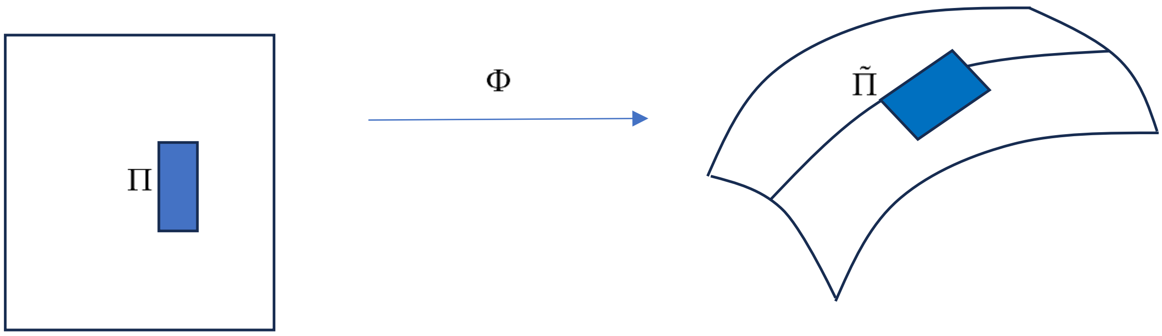




§ 2. Площадь поверхности

Продолжим рассмотрение простой поверхности Σ:

$$\Phi : \bar{\Omega} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3 .$$



Пусть Π — прямоугольник $[u, u+\Delta u] \times [v, v+\Delta u]$ в области Ω. Прямоугольник имеет площадь $\mu\Pi = \Delta u \cdot \Delta v$.

Отображение Φ переводит Π в криволинейный параллелограмм на поверхности Σ, а $d\Phi$ переводит Π в настоящий параллелограмм $\tilde{\Pi}$ в касательной плоскости. Площадь этого параллелограмма равна

$$\mu\tilde{\Pi} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \cdot \Delta v .$$

Для вычисления $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ запишем формулы

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 = EG - F^2 ,$$

где $E = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \right)^2$, $G = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} \right)^2$,

$$F = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v}.$$

И итоге

$$\mu\tilde{\Pi} = \sqrt{EG - F^2}\, \Delta u \cdot \Delta v$$

Если представить область Ω в виде объединения прямоугольников $\Pi_1, \ldots, \Pi_p$, то сумму площадей параллелограммов $\tilde{\Pi}_1, \ldots, \tilde{\Pi}_p$ примем за приближенное значение площади поверхности Σ:

$$\mu\Sigma \approx \sum_{i=1}^{p} \sqrt{E_i G_i - F_i^2}\, \Delta u_i \Delta v_i$$

При измельчении разбиения сумма в правой части формулы стремится к двойному интегралу.

В связи с этим примем

Определение. Площадью поверхности Σ называется

$$\mu\Sigma = \iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dudv .$$

Для поверхности Σ, графика непрерывно дифференцируемой функции f, имеем

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k},\ E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2, G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2, F = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \text{ так что}$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \text{ и } \mu(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dudv .$$

Определение оправдывается проведенными выше эвристическими рассуждениями и следующими свойствами:

1) Число $\mu(\Sigma)$ не зависит от параметризации и ориентации.

Действительно, пусть $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \circ \Psi$ — вектор-функция новой параметризации. Мы уже показали, что $\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} J$, где J — якобиан отображения Ψ. Поэтому в силу формулы замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial u_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial v_1} \right| du_1 dv_1 = \iint_{\Omega_1} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| |J|\, du_1 dv_1 = \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right| dudv .$$

2) Если поверхность Σ есть измеримая по Жордану область на координатной плоскости xOy, т. е. задается параметрическими уравнениями

$$x = u, y = v, z = 0,$$

то $E = G = 1, F = 0$ и $\iint_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, dudv = \iint_{\Omega} dudv$ — мера Жордана области Ω.

3) $\mu(\Sigma)$ — аддитивная функция поверхности: если Σ разрезана на части Σ_1, Σ_2, то $\mu(\Sigma) = \mu(\Sigma_1) + \mu(\Sigma_2)$.

В соответствии с последним свойством для кусочно-гладкой поверхности, склеенной из простых поверхностей $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p$, положим

$$\mu(\Sigma) = \mu(\Sigma_1) + \cdots + \mu(\Sigma_p).$$

§ 3. Поверхностный интеграл первого рода

На поверхности построена мера — площадь поверхности. По этой мере построим интеграл — поверхностный интеграл первого рода.

Определение. Пусть

$$\Phi : \bar{\Omega} \to \Sigma \subset \mathbb{R}^3 \text{ — простая гладкая поверхность,}$$

T — непрерывная функция на поверхности Σ.

Двойной интеграл

$$\iint\limits_{\bar{\Omega}} T \circ \Phi \sqrt{EG-F^2} = \left(\iint\limits_{\bar{\Omega}} T\left(\Phi(u,v)\right)\sqrt{EG-F^2}\,dudv \right)$$

называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции T по поверхности Σ и обозначается символом $\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma$.

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma = \iint\limits_{\bar{\Omega}} T \circ \Phi \sqrt{EG-F^2}\ .$$

В определении интеграла можно заменить поверхность на некоторую часть поверхности.

Если интегрирование ведется по графику $\Sigma : z = f\left(x,y\right),\ \left(x,y\right) \in \bar{\Omega}$ непрерывно дифференцируемой функции f, то

$$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma = \iint\limits_{\bar{\Omega}} T\left(x,y,f\left(x,y\right)\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\ .$$

Если кусочно-гладкая поверхность Σ составлена из $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_p$, полагаем

$$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} T d\sigma + \cdots + \iint\limits_{\Sigma_p} T d\sigma\ .$$

Если функция $T \geq 0$, ее можно интерпретировать как плотность материальной поверхности. В таком случае интеграл $\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma$ есть масса поверхности.

Основные свойства интеграла.

1) $\mu\Sigma = \iint\limits_{\Sigma} d\sigma$ — площадь поверхности Σ.

2) Линейность:

$$\iint\limits_{\Sigma} \left(\alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2\right) d\sigma = \alpha_1 \iint\limits_{\Sigma} T_1 d\sigma + \alpha_2 \iint\limits_{\Sigma} T_2 d\sigma\ .$$

3) Аддитивность

$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma = \iint\limits_{\Sigma_1} T d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_2} T d\sigma$, если поверхность Σ составлена из Σ_1 и Σ_2.

4) Положительность:

$$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma \geq 0, \text{ коль скоро } \mathrm{T} \geq 0\ .$$

Монотонность:

$$\text{если } T_1 \le T_2 \text{, то } \iint\limits_{\Sigma} T_1 d\sigma \le \iint\limits_{\Sigma} T_2 d\sigma \,.$$

Из свойств положительности и монотонности получаем важные неравенства:

$$\left| \int\limits_{\Sigma} T d\sigma \right| \le \int\limits_{\Sigma} |T| d\sigma \,,$$

$$\text{если } \forall w \in \Sigma \ m \le T(w) \le M \text{, то } m\mu\Sigma \le \iint\limits_{\Sigma} T d\sigma \le M\mu\Sigma \,,$$

$$\text{если } \forall w \in \Sigma \ |T(w)| \le M \text{, то } \left| \iint\limits_{\Sigma} T d\sigma \right| \le M\mu\Sigma \,.$$

Теорема о среднем

$$\iint\limits_{\Sigma} T d\sigma = T(\xi)\mu\Sigma \text{ для некоторой точки } \xi \in \Sigma \,.$$

(здесь существенна связность поверхности, которую мы предполагаем по умолчанию).

5) Интеграл не зависит от выбора параметризации и ориентации.

Свойства 1)–5) следуют из соответствующих свойств двойного интеграла и свойств площади.