§ 7 Основные понятия векторного анализа и теории поля

1^0 Пусть G — область в трехмерном пространстве. Числовые и векторные функции в G называют еще числовыми (скалярными) и векторными полями. Эти поля играют первостепенную роль во многих естественнонаучных приложениях анализа.

С числовыми и векторными полями свяжем дифференциальные формы.

Числовое поле f является 0-формой.

Векторному полю $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega^1_{\mathrm{A}} = A_x dx + A_y dy + A_z dz\,, \tag{1}$$

действующую по правилу $\omega^1_{\mathbf{A}}(\xi) = (\mathbf{A},\ \xi)$. (Здесь $(\mathbf{A},\ \xi)$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и ξ).

Векторному полю $\mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega^2_{\mathbf{B}} = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy\,,\ \omega^2_{\mathbf{B}}(\xi_1,\ \xi_2) = (\mathbf{B},\ \xi_1,\ \xi_2)\,, \tag{2}$$

($(\mathbf{B},\ \xi_1,\ \xi_2)$ — смешанное произведение векторов $\mathbf{B},\ \xi_1,\ \xi_2$).

Числовому полю ρ поставим в соответствие дифференциальную форму

$$\omega^3_{\rho} = \rho\, dx \wedge dy \wedge dz = \rho dV\,. \tag{3}$$

Аппарат дифференциальных форм позволяет единообразно описывать операции над различными полями.

Предложение

1) Линейной комбинации полей отвечает соответствующая линейная комбинация дифференциальных форм.

2) $$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^1_{\mathbf{B}} = \omega^2_{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}\,. \tag{4}$$

$$\omega^1_{\mathbf{A}} \wedge \omega^2_{\mathbf{B}} = \omega^3_{(\mathbf{A},\mathbf{B})}\,. \tag{5}$$

Внешнему умножению линейных форм отвечает векторное умножение соответствующих векторных полей; внешнему умножению линейной формы на 2-форму отвечает скалярное умножение.

Доказательство. Первое утверждение не вызывает сомнений.

Докажем соотношение (4). Пусть

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$
$$\omega_{\mathbf{B}}^1 = B_x dx + B_y dy + B_z dz\ .$$

Тогда

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^1 = \left(A_y B_z - B_y A_z\right) dy \wedge dz + \left(A_z B_x - B_z A_x\right) dz \wedge dx + \left(A_x B_y - B_x A_y\right) dx \wedge dy\ .$$

Выражения в скобках — координаты векторного произведения $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, так что формула (4) доказана.

Докажем (5). Пусть

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$
$$\omega_{\mathbf{B}}^2 = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy ,$$

Тогда

$$\omega_{\mathbf{A}}^1 \wedge \omega_{\mathbf{B}}^2 = \left(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\right) dx \wedge dy \wedge dz = \left(\mathbf{A}, \mathbf{B}\right) dV\ .$$

2^0 Дифференциальные операции теории поля

Внешнее дифференцирование форм объединяет различные дифференциальные операции теории поля.

Пусть f — функция, тогда $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ — 1-форма, соответствующая векторному полю

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}\ , \tag{6}$$

называемому градиентом числового поля f .

Если $\mathbf{A}$ — векторное поле, $\omega_{\mathbf{A}}^1$ — соответствующая 1-форма, то $d\omega_{\mathbf{A}}^1$ — 2-форма, отвечающая векторному полю

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{7}$$

называемому ротором поля $\mathbf{A}$.

Наконец, если $\mathbf{B}$ — векторное поле, $\omega_{\mathbf{B}}^2$ — 2-форма, то $d\omega_{\mathbf{B}}^2$ — 3-форма, связанная с числовым полем

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}\ — \tag{8}$$

дивергенцией векторного поля $\mathbf{B}$.

Операции grad, rot, div соответствуют внешнему дифференцированию дифференциальных форм.

Если положить $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$, то можно написать символические формулы

$$\mathrm{grad}\, f = \nabla f, \ \mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}, \ \mathrm{div}\, \mathbf{B} = (\nabla, \mathbf{B}). \tag{9}$$

3⁰ Дифференциальные операции второго порядка

Свойство внешнего дифференцирования $d(d\omega) = 0$ в терминах числовых и векторных полей принимает вид

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f = 0, \ \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \mathbf{0}. \tag{10}$$

В последних формулах представлены дифференциальные операции второго порядка.

Можно рассмотреть еще три дифференциальные операции второго порядка:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f, \ \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \mathbf{B}, \ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathbf{A}.$$

Для первой из них имеем выражение

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \ — \tag{11}$$

оператор Лапласа для функции f. Можно символически написать $\Delta = (\nabla, \nabla)$.

Оператор Лапласа можно применять и к векторным полям. Это позволяет связать две оставшиеся операции второго порядка формулой

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \tag{12}$$

$$(\ \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla, \mathbf{A}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}\ ).$$

§ 8 Дифференциальные операции в криволинейных координатах

Пользуясь декартовой системой координат, векторное поле $\mathbf{A}$ разлагают по базису $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}.$$

Пусть отображение

$$\Phi : D \to G \qquad \begin{cases} x = \varphi(u, v, w), \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

вводит в области G криволинейные координаты. Будем предполагать, что отображение Φ имеет положительный якобиан.

Операция дифференцирования форм единообразно реализуется в разных координатных системах. Опираясь на это обстоятельство, запишем дифференциальные операции теории поля в криволинейных координатах.

Рассмотрим единичные векторы, касательные к координатным линиям, криволинейной системы, введенной отображением Φ :

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right\|}\frac{\partial\Phi}{\partial u},\ \mathbf{e}_v = \frac{1}{\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}\right\|}\frac{\partial\Phi}{\partial v},\ \mathbf{e}_w = \frac{1}{\left\|\dfrac{\partial\Phi}{\partial w}\right\|}\frac{\partial\Phi}{\partial w}$$

Будем предполагать, что введенная система координат является ортогональной, т.е. векторы $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$ взаимно ортогональны.

Векторное поле принято разлагать по базису $\mathbf{e}_u$, $\mathbf{e}_v$, $\mathbf{e}_w$:

$$\mathbf{A} = A_u\mathbf{e}_u + A_v\mathbf{e}_v + A_w\mathbf{e}_w .$$

Определение

Числа

$$H_u = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial u}\right)^2},$$

$$H_v = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial v}\right)^2}$$

$$H_w = \left\|\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial w}\right)^2}$$

называются коэффициентами Ламе криволинейной системы координат.

Пусть $\mathbf{A} = A_u\mathbf{e}_u + A_v\mathbf{e}_v + A_w\mathbf{e}_w$ — векторное поле, записанное в ортогональной криволинейной системе координат; $\omega^1_{\mathbf{A}}$ — соответствующая 1-форма, $\omega^1_{\mathbf{A}}(\xi) = (\mathbf{A},\ \xi)$, $\omega^1_{\mathbf{A}} = a_u du + a_v dv + a_w dw$.

Для вектора $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}$ имеем $\omega^1_{\mathbf{A}}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right) = a_u$ и $\omega^1_{\mathbf{A}}\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\right) = A_u H_u$. Таким образом,

$$a_u = A_u H_u,\ a_v = A_v H_v,\ a_w = A_w H_w .$$

Для 2-формы $\omega^2_{\mathbf{A}}$, $\omega^2_{\mathbf{A}}(\xi_1,\ \xi_2) = (\mathbf{A},\ \xi_1,\ \xi_2)$, $\omega^2_{\mathbf{A}} = a_u dv \wedge dw + a_v dw \wedge du + a_w du \wedge dv$ получим соотношения

$$a_u = H_v H_w A_u,\ a_v = H_w H_u A_v,\ a_w = H_u H_v A_w .$$

Наконец, для числового поля ρ соответствующая 3-форма имеет вид

$$\omega_\rho^3 = \rho H_u H_v H_w du \wedge dv \wedge dw .$$

Теперь можно записать $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\operatorname{div}\mathbf{A}$, Δf в криволинейных координатах.

$$\operatorname{grad} f = \frac{1}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}e_u + \frac{1}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}e_v + \frac{1}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}e_w,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{H_v H_w}\left(\frac{\partial(H_w A_w)}{\partial v} - \frac{\partial(H_v A_v)}{\partial w}\right)e_u +$$

$$+\frac{1}{H_w H_u}\left(\frac{\partial(H_u A_u)}{\partial w} - \frac{\partial(H_w A_w)}{\partial u}\right)e_v + \frac{1}{H_u H_v}\left(\frac{\partial(H_v A_v)}{\partial u} - \frac{\partial(H_u A_u)}{\partial v}\right)e_w,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial(H_v H_w A_u)}{\partial u} + \frac{\partial(H_w H_u A_v)}{\partial v} + \frac{\partial(H_u H_v A_w)}{\partial w}\right),$$

$$\Delta f = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{H_v H_w}{H_u}\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{H_w H_u}{H_v}\frac{\partial f}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{H_u H_v}{H_w}\frac{\partial f}{\partial w}\right)\right).$$

Рассмотрим **цилиндрические** координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = h \end{cases} \qquad H_r = 1,\ H_\varphi = r,\ H_h = 1$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(rA_h)}{\partial h}\right).$$

Для сферических координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \\ y = \rho\sin\varphi\cos\psi, \\ z = \rho\sin\psi, \end{cases} \qquad H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho\cos\psi,\ H_\psi = \rho.$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho^2\cos\psi}\left(\frac{\partial(A_\rho\rho^2\cos\psi)}{\partial\rho} + \frac{\partial(A_\varphi\rho)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(A_\psi\rho\cos\psi)}{\partial\psi}\right).$$

Упражнение. Запишите в цилиндрических и сферических координатах $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ **.**

§ 9 Интегральные формулы векторного анализа

1^0 Векторная запись дифференциальных форм $\omega_{\mathbf{A}}^1$, $\omega_{\mathbf{B}}^2$ и интегралов

$\mathbf{A}$ — векторное поле, γ — гладкий путь, $\mathbf{l}(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичный касательный вектор. Тогда интеграл от дифференциальной формы $\omega_{\mathbf{A}}^1$ можно записать в виде

$$\int_\gamma \omega_{\mathbf{A}}^1 = \int_\gamma A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_\gamma (A_x\cos\lambda + A_y\cos\mu + A_z\cos\nu)dl = \int_\gamma (\mathbf{A}, \mathbf{l})\,dl . \qquad (1)$$

$\int_\gamma (\mathbf{A},\mathbf{l})\,dl$ называется работой поля вдоль пути γ. Работа $\oint_\gamma (\mathbf{A},\mathbf{l})\,dl$ вдоль замкнутого пути называется циркуляцией.

Для векторного поля $\mathbf{B}$ и гладкой поверхности S с единичной нормалью $\mathbf{n}$ интеграл от дифференциальной формы $\omega^2_{\mathbf{B}}$ представим формулой

$$\begin{aligned}\iint_S \omega^2_{\mathbf{B}} &= \iint_S B_x dy\wedge dz + B_y dz\wedge dx + B_z dx\wedge dy = \\ &= \iint_S \left(B_x\cos\lambda + B_y\cos\mu + B_z\cos\nu\right)d\sigma = \iint_S (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma.\end{aligned} \tag{2}$$

$\iint_S (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma$ называется потоком поля $\mathbf{B}$ через ориентированную поверхность $(S,\,\mathbf{n})$.

Если $\mathbf{B}$ — поле скоростей жидкости, то интеграл $\iint_S (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma$ дает количество жидкости, протекающее за единицу времени через поверхность S в направлении ориентирующей нормали $\mathbf{n}$.

2^0 Формула Стокса

Циркуляция вектора $\mathbf{A}$ по контуру Γ равна потоку $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ через поверхность S, имеющую Γ своим краем при согласованных ориентациях S и $\Gamma = \partial S$:

$$\oint_\Gamma (\mathbf{A},\mathbf{l})\,dl = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{A},\mathbf{n})\,d\sigma\,. \tag{3}$$

3^0 Формула Остроградского

Поток векторного поля $\mathbf{B}$ в направлении внешней нормали замкнутой поверхности S равен интегралу от дивергенции векторного поля $\mathbf{B}$ по телу G, ограниченному поверхностью S:

$$\oiint_{S^+} (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma = \iiint_G \operatorname{div}\mathbf{B}\,dV\,. \tag{4}$$

4^0 Интегральные определения div и rot

Пусть K_r — шар S_r — сфера радиуса r с центром в точке x, V_r — объем шара, тогда по теореме о среднем $\oiint_{S_r^+} (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma = \iiint_{K_r} \operatorname{div}\mathbf{B}\,dV = \operatorname{div}\mathbf{B}\big|_{\tilde{x}}\cdot V_r$ для некоторой точки $\tilde{x}$ шара K_r.

Переходя к пределу при $r\to 0$, с учетом того, что $\tilde{x}\to x,\ \operatorname{div}\mathbf{B}|_{\tilde{x}}\to \operatorname{div}\mathbf{B}|_x$, для $\operatorname{div}\mathbf{B}$ в точке x мы получаем формулу

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \lim_{r\to 0}\frac{1}{V_r}\oiint_{S_r^+} (\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma\,. \tag{5}$$

Формула (5) дает инвариантное (не использующее систему координат) определение дивергенции.

С физической точки зрения $\operatorname{div}\mathbf{B}$ — плотность распределения источников.

Аналогичные построения приводят к инвариантному определению ротора.

Пусть S_r — диск радиуса r с центром x и нормалью $\mathbf{n}$, s_r — его площадь. Тогда

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A},\, \mathbf{n}\right) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{s_r}\int\limits_{\partial S_r}\left(\mathbf{A},\, \mathbf{l}\right)dl\,. \tag{6}$$

Формула (6) дает значения скалярных произведений ротора $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ на всевозможные единичные векторы $\mathbf{n}$. Эти скалярные произведения однозначно определяют вектор $\mathbf{B}$, в частности, координаты вектора — это $B_x = \left(\mathbf{B},\, \mathbf{i}\right)$, $B_y = \left(\mathbf{B},\, \mathbf{j}\right)$, $B_z = \left(\mathbf{B},\, \mathbf{k}\right)$.

§ 10 Потенциальное векторное поле

Определение

Векторное поле $\mathbf{A}$ называется потенциальным, если существует скалярное поле u, такое что $\mathbf{A} = \operatorname{grad} u$. Скалярное поле u называется потенциалом векторного поля $\mathbf{A}$.

Пример

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r^3},\ u = -\frac{1}{r}.$$

Если $\mathbf{A}$ — потенциальное поле, то $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{A}$ — безвихревое поле.

Работа потенциального поля вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{\gamma}\left(\mathbf{A},\, \mathbf{l}\right)dl = u\left(M_1\right) - u\left(M_0\right),$$

для пути γ, соединяющего точку M_0 с точкой M_1.

Если $\mathbf{A}$ — потенциальное поле, то работа не зависит от пути (формула Ньютона-Лейбница), циркуляция по любому замкнутому пути равна нулю.

Наоборот, предполагая независимость работы от пути, можно корректно определить числовое поле u:

$$u\left(M\right) = \int\limits_{\gamma_M}\left(\mathbf{A},\mathbf{l}\right)dl\,,$$

где γ_M — путь, соединяющий некоторую фиксированную точку M_0 с точкой M. Числовое поле u — потенциал векторного поля $\mathbf{A}$.

Если область G определения безвихревого поля $\mathbf{A}$ односвязна, в том смысле, что на любой замкнутый контур Γ можно натянуть поверхность S, то в силу формулы Стокса

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\mathbf{A},\mathbf{l}\right)dl = \iint\limits_{S}\left(\operatorname{rot}\mathbf{A},\mathbf{n}\right)d\sigma = 0\,,$$

поле $\mathbf{A}$ является потенциальным.

§ 11 Соленоидальное поле

1⁰ Определение

Поле $\mathbf{B}$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div}\mathbf{B}=0$.

Типичный пример — поле ротора,

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}.$$

$\mathbf{A}$ называется векторным потенциалом поля $\mathbf{B}$.

Пример

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\mathbf{r}.$$

$$\mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\mathbf{r}=\nabla\times\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\mathbf{r}+\nabla\times(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=\nabla\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\times\mathbf{r}+(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\nabla\times\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=$$

$$=\operatorname{grad}\left(\boldsymbol{\omega},\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\right)\times\mathbf{r}+(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\operatorname{rot}\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},$$

$\mathbf{B}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ — поле скоростей вращения твердого тела вокруг $\boldsymbol{\omega}$ с угловой скоростью $|\boldsymbol{\omega}|$.

Для этого поля

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\nabla\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\nabla,\mathbf{r})-(\nabla,\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}=3\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}=2\boldsymbol{\omega}.$$

$\operatorname{rot}\mathbf{B}$ характеризует вращательное действие поля.

2⁰ Пусть $\mathbf{B}$ — векторное поле. Рассмотрим линии, касающиеся векторов поля. Они называются векторными линиями векторного поля $\mathbf{B}$. Векторные линии отвечают системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=b_x(x,y,z),\\ \dot{y}=b_y(x,y,z),\\ \dot{z}=b_z(x,y,z).\end{cases}$$

Рассмотрим поверхность S, для которой вектор $\mathbf{B}$ не является касательным ни в одной точке. Совокупность векторных линий, проходящих через точки поверхности S, образует векторную трубку векторного поля $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{B}$ — соленоидальное поле, то по формуле Остроградского поток векторного поля $\mathbf{B}$ через поверхность отрезка векторной трубки равен нулю. Поскольку поле имеет нулевой поток через боковую поверхность трубки (на боковой поверхности $(\mathbf{B},\mathbf{n})=0$), мы получаем закон сохранения интенсивности векторной трубки

$$\iint\limits_{S_1}(\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma=\iint\limits_{S_2}(\mathbf{B},\mathbf{n})\,d\sigma.$$