Лекция 6 продолжение 12.10.2023

§ 6. Теоремы существования и единственности

1^0. Условие Липшица.

Определение. 1) Пусть f — функция на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. f удовлетворяет условию Липшица с константой L, если

$$\forall x, y \in E \ \left| f(x) - f(y) \right| \le L \|x - y\|.$$

2) Функция $f(x, y)$ в области $G \subset \mathbb{R}^2$ удовлетворяет условию Липшица по y, если

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in G \ \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \le L |y_1 - y_2|$$

Предложение. 1) Если f имеет ограниченную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в выпуклой по y области G, то f удовлетворяет условию Липшица по y.

2) Если f имеет в области G непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то f удовлетворяет условию Липшица по y **локально**, каждая точка имеет окрестность в которой выполняется условие Липшица по y.

2^0. Сведение задачи Коши к интегральному уравнению.

Пусть f непрерывна в области G, $(x_0, y_0) \in G$; $y = \varphi(x)$, $x \in \Delta$ — решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

$$y\big|_{x_0} = y_0. \tag{2}$$

Тогда

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)),$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\,dt,$$

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt. \tag{3}$$

Итак, если φ — решение задачи Коши (1), (2), то φ удовлетворяет соотношению (3), которое называется интегральным уравнением, соответствующим задаче Коши (1), (2). Пусть теперь φ — непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению (3). Тогда $\varphi(x_0) = y_0$ и $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, так что φ — решение задачи Коши (1), (2).

3^0. Теорема 1. О существовании решения задачи Коши

Задача Коши для дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) имеет решение.

Доказательство проведем в предположении, что f локально удовлетворяет условию Липшица по y.

Решение построим методом последовательных приближений Пикара.

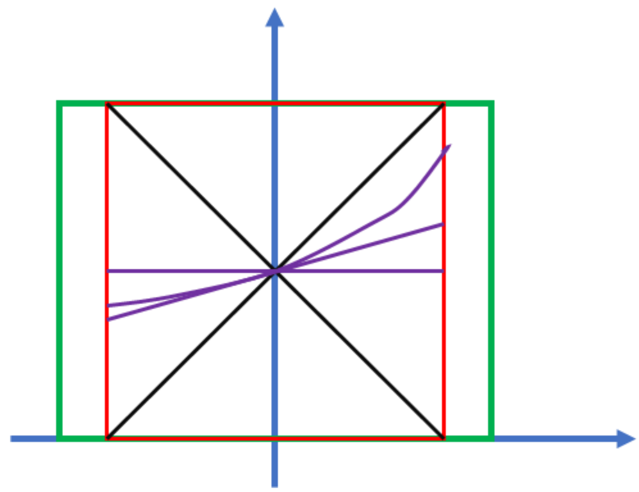
На некотором отрезке $[a, b]$ построим последовательность функций, полагая

$$\varphi_0(x) = y_0,$$

$$\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t,\ \varphi_n(t)\right)dt. \tag{4}$$

Сделанные предположения позволяют корректно провести такое построение.
Подберем $\delta > 0$ так, чтобы $\Pi_0 = [x_0 - \delta,\ x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta,\ y_0 + \delta] \subset G$, в Π_0 выполнялось условие Липшица. Положим $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi_0} \left| f(x,\ y) \right|$, $\eta = \min\left\{\delta,\ \dfrac{\delta}{M}\right\}$.

Основные построения проведем в прямоугольнике $\Pi = [x_0 - \eta,\ x_0 + \eta] \times [y_0 - \delta,\ y_0 + \delta] \subset G$.
Функциональную последовательность $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяем на отрезке $[x_0 - \eta,\ x_0 + \eta]$ рекуррентной формулой (4). Для корректного использования этой формулы следует убедиться, что при всех $x \in [x_0 - \eta,\ x_0 + \eta]$ и $n = 0, 1, \ldots$ точка $(x,\ \varphi_n(x))$ лежит в прямоугольнике Π.
Проведем индукцию по n. При $n = 0$ имеем $(x,\ \varphi_0(x)) = (x,\ y_0) \in \Pi$. Если



$$\forall x \in [x_0 - \eta,\ x_0 + \eta]\ (x,\ \varphi_n(x)) \in \Pi,$$

то

$$\left|\varphi_{n+1}(x) - y_0\right| \le M\left|x - x_0\right| \le M\eta \le \delta$$

и поэтому

$$(x,\ \varphi_{n+1}(x)) \in \Pi.$$

Установим равномерную сходимость функциональной последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$. Заменив последовательность функциональным рядом

$$\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

применим признак Вейерштрасса.
Для простоты ограничимся рассмотрением отрезка $[x_0,\ x_0 + \eta]$. При $x \in [x_0,\ x_0 + \eta]$ имеем

$$\varphi_1(x) - \varphi_0(x) = \int_{x_0}^{x} f\left(t,\ \varphi_0(t)\right)dt,$$

$$\left|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\right| \le M(x - x_0);$$

$$\varphi_2(x) - \varphi_1(x) = \int_{x_0}^{x} \left(f\left(t,\ \varphi_1(t)\right) - f\left(t,\ \varphi_0(t)\right) \right)dt,$$

$$\left|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\right| \le L\int_{x_0}^{x} \left|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\right|dt \le LM\int_{x_0}^{x} (t - x_0)\,dt = LM\frac{(x - x_0)^2}{2!};$$

Продолжая этот процесс, получим неравенство

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le M\cdot L^{n-1}\frac{\left|x-x_0\right|^n}{n!},$$

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right| \le M\cdot L^{n-1}\frac{\eta^n}{n!}.$$

Поскольку ряд $\sum ML^{n-1}\frac{\eta^n}{n!}$ сходится, то функциональный ряд $\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n-\varphi_{n-1}\right)$ равномерно сходится. Сумму ряда обозначим через φ,

$$\varphi_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi.$$

Замкнутость прямоугольника Π обеспечивает включение

$$\left(x,\ \varphi(x)\right)\in\Pi .$$

Равномерная сходимость позволяет перейти к пределу в равенстве (4):

$$\left|\int_{x_0}^{x}\left(f\left(t,\ \varphi_n(t)\right)-f\left(t,\ \varphi(t)\right)\right)dt\right| \le L\left|\int_{x_0}^{x}\left|\varphi_n(t)-\varphi(t)\right|dt\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Предельный переход дает равенство

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f\left(t,\ \varphi(t)\right)dt.$$

φ — решение задачи Коши.

Пример

$$y'=y$$

$$y|_{x=0}=1$$

$$\varphi_0(x)=1$$

$$\varphi_{n+1}(x)=y_0+\int_0^x\varphi_n(t)\,dt$$

$$\varphi_1(x)=1+x$$

$$\varphi_2(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}$$

$$\varphi_3(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\underset{n\to}{\to}e^x$$

4⁰. Дифференциальные неравенства.

Лемма

Пусть φ — дифференцируемая функция на промежутке Δ, $x_0 \in \Delta$,

$$\forall x \in \Delta \ \left|\varphi'(x)\right| \le A\left|\varphi(x)\right| + B, \tag{5}$$

где $A,\ B \ge 0$;

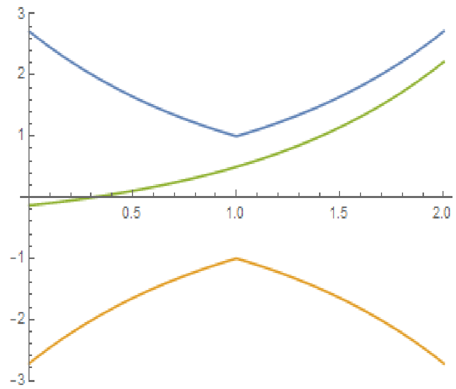
$$\left|\varphi(x_0)\right| \le p. \tag{6}$$

Тогда

$$\forall x \in \Delta \ \left|\varphi(x)\right| \le pe^{A|x-x_0|} + \frac{B}{A}\left(e^{A|x-x_0|} - 1\right). \tag{7}$$

(При $A = 0$ соотношение (7) принимает вид $\left|\varphi(x)\right| \le p + B|x - x_0|$).

В правой части неравенства (7) стоит решение задачи Коши $y' = Ay + B,\ y\big|_{x_0} = p$.



Доказательство. Ограничимся случаем $x > x_0$ и неравенством

$$\varphi(x) \le pe^{A(x-x_0)} + \frac{B}{A}\left(e^{A(x-x_0)} - 1\right). \tag{8}$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\left(\varphi(x) + \frac{B}{A}\right)e^{-A(x-x_0)} \le p + \frac{B}{A} \tag{9}$$

На отрезке $[x_0,\ x]$ рассмотрим функцию

$$\psi : \psi(t) = \left(\varphi(t) + \frac{B}{A}\right)e^{-A(t-x_0)}.$$

Если $\varphi \ge 0$ на $[x_0,\ x]$, то

$$\psi'(t) = \left(\varphi'(t) - A\varphi(t) - B\right)e^{-A(t-x_0)} \le 0,$$

функция ψ убывает, $\psi(x) \le \psi(x_0) \le p + \dfrac{B}{A}$.

Если $\varphi(x) \le 0$, неравенство очевидно. Если $\varphi(x) > 0$, но φ имеет и отрицательные значения, обозначим через x_1 наибольший нуль функции φ. Функция ψ убывает на отрезке $[x_1,\ x]$,

$$\psi(x) \le \psi(x_1) = \frac{B}{A}e^{-A(x_1-x_0)} \le p + \frac{B}{A}.$$

Лемма доказана.

5⁰. Теорема 2. О единственности решения задачи Коши

f непрерывна в области G и локально удовлетворяет условию Липшица по y.

Тогда задача Коши

$$y' = f(x,y),\quad y\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (x_0, y_0) \in G$$

имеет не более одного решения: если $\varphi,\ \psi$ — решения задачи Коши, определенные на промежутках $\Delta_1,\ \Delta_2$ соответственно, то $\varphi=\psi$ на $\Delta=\Delta_1\cap\Delta_2$.

Доказательство.

От противного.

Пусть решения $\varphi,\ \psi$ задачи Коши (1), (2) определены на $(a,\ b)$, $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$, но при некотором $x_1\in(a,\ b)$ $\varphi(x_1)\neq\psi(x_1)$. Можно считать, что $x_1>x_0$. Положим

$$x_2=\sup\left\{x\in[x_0,x_1):\varphi(x)=\psi(x)\right\},$$

тогда $\varphi(x_2)=\psi(x_2)$ и $\forall x\in(x_2,\ x_1)$ $\varphi(x)\neq\psi(x)$.

φ,ψ — решения дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$:

$$\varphi'(x)=f\left(x,\ \varphi(x)\right),$$

$$\psi'(x)=f\left(x,\ \psi(x)\right),$$

$$\varphi'(x)-\psi'(x)=f\left(x,\ \varphi(x)\right)-f\left(x,\ \psi(x)\right)$$

Можно подобрать прямоугольник $\Pi\subset G$ с центром $\left(x_2,\ \varphi(x_2)\right)$, на котором выполнено условие Липшица. Видим, что в пределах некоторой окрестности точки x_2

$$\left|\varphi'(x)-\psi'(x)\right|\leq L\left|\varphi(x)-\psi(x)\right|.$$

Функция $\chi=\varphi-\psi$ удовлетворяет дифференциальному неравенству $|\chi'|\leq L|\chi|$ и $\chi(x_2)=0$. По лемме о дифференциальном неравенстве $\chi=0$ в некоторой окрестности точки x_2, что противоречит определению x_2. Единственность решения задачи Коши установлена.

Следствие. Если функция f непрерывна и имеет непрерывную частную производную по y в области G, то задача Коши

$$y'=f(x,y),\quad y\big|_{x=x_0}=y_0\qquad (x_0,y_0)\in G$$

имеет единственное решение

Область $D\subset G$ называется областью единственности решения задачи Коши, если два любых решения, графики которых лежат в D, определенные на интервале $(a,\ b)$ и совпадающие при некотором $x_0\in(a,\ b)$, совпадают на всем $(a,\ b)$.

Мы установили, что область, в которой $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна, является областью единственности.