Лекция 6 20.09.2024

§ 6. Бесконечно малые последовательности

1⁰. Определение

Последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно малой (б.м.), если $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon .$$

2⁰. Теорема1.

Сумма бесконечно малых последовательностей — бесконечно малая,

Если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м., $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$,то $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.

Теорема 1 — прямое следствие теоремы о пределе суммы.

3⁰. Теорема 2.

Произведение б.м. на ограниченную — б.м.

Если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м., а $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $\beta_n = x_n\alpha_n$, то $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.

Доказательство.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная, $\exists M > 0\ |x_n| \le M\ \ (n = 1, 2, \ldots)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то найдется такой номер N, что

$$n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M} .$$

Теперь для $n > N$ получаем

$$|\beta_n| \le M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon ,$$

$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — б.м.

Следствия 1) Произведение бесконечно малых — бесконечно малая.

2) Линейная комбинация бесконечно малых — бесконечно малая.

4⁰. Теорема 3. Описание сходимости в терминах б.м.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, a — вещественное число.

Тогда

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow \alpha_n = x_n - a \quad \text{— б.м.}$$

Справедливость теоремы не вызывает сомнений.

5⁰. Определение.

1) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют бесконечно большой (б.б.) и пишут $x_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, если

$$\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists N \ \ n > N \Rightarrow |x_n| > \mathrm{E}.$$

2) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, если $\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists N \ \ n > N \Rightarrow x_n > \mathrm{E}$.

3) $x_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, если $\forall \mathrm{E} > 0 \ \exists N \ \ n > N \Rightarrow x_n < -\mathrm{E}$.

6⁰. Теорема 4. Связь б.м. и б.б.

1) Если $\alpha_n \neq 0$ — б.м., то $x_n = \dfrac{1}{\alpha_n}$ — б.б.

2) Если x_n — б.б., то $\alpha_n = \dfrac{1}{x_n}$ — б.м.

Доказательство.

1) Возьмем произвольное $\mathrm{E} > 0$, положим $\varepsilon = \dfrac{1}{\mathrm{E}}$. Найдется такой номер N, что

$$n > N \Rightarrow |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Для $n > N$ получаем

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon} = \mathrm{E}.$$

2) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, положим $\mathrm{E} = \dfrac{1}{\varepsilon}$. Найдется такой номер N, что

$$n > N \Rightarrow |x_n| > \mathrm{E}.$$

Для $n > N$ получаем

$$|\alpha| < \frac{1}{\mathrm{E}} = \varepsilon.$$

7^0. Расширенное множество вещественных чисел

Дополним $\mathbb{R}$ элементами $+\infty,\ -\infty$. $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется расширенным множество вещественных чисел.

Считаем, что

$$\forall x \in \mathbb{R}\ -\infty < x < +\infty .$$

Для неограниченного сверху множества E имеем $\sup E = +\infty$; для неограниченного снизу множества E имеем $\inf E = -\infty$;

Над бесконечными числами можно выполнять арифметические операции (с естественными ограничениями):

$$\begin{aligned}
&a + (\pm\infty) = \pm\infty, a \in \mathbb{R} \\
&(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \\
&x \cdot \infty = \infty,\ x \neq 0, \\
&\frac{a}{\infty} = 0,\ a \in \mathbb{R}, \\
&\frac{x}{0} = \infty,\ x \neq 0.
\end{aligned}$$

Эти равенства выражают теоремы об арифметических операциях над последовательностями с соответствующими свойствами. Например, равенство $a \cdot \infty = \infty,\ a \neq 0$ — символическая запись утверждения

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \neq 0,\ y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty \Rightarrow z_n = x_n y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

($x_n \underset{n\to\infty}{\to} a \neq 0$, $|x_n| > \dfrac{|a|}{2}$ для $n = n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ Возьмем произвольное $\mathrm{E} > 0$, подберем $N \geq n_0$ так, чтобы $|y_n| > \dfrac{2E}{|a|}$ при $n > N$. Для тех же n получаем неравенство $|z_n| > \mathrm{E}$).

Условие $a \neq 0$ существенно, если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,\ y_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, то поведение $z_n = x_n y_n$ зависит от более тонких свойств сомножителей:

$$\begin{aligned}
&x_n = \frac{1}{n},\ y_n = n,\ z_n = 1; \\
&x_n = \frac{1}{n^2},\ y_n = n,\ z_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0; \\
&x_n = \frac{1}{n},\ y_n = n^2,\ z_n = n \underset{n\to\infty}{\to} \infty.
\end{aligned}$$

В связи с этим говорят, что выражение $0 \cdot \infty$ является неопределенностью. Основные неопределенности описываются формулами

$$\infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}.$$

Лекция 7   24.09.2022

§ 7 Сходимость монотонных последовательностей

1⁰. Определение

1) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется возрастающей, если

$$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots$$

2) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется убывающей, если

$$x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots$$

3) Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется монотонной, если она является возрастающей или убывающей.

1') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго возрастающей, если

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$$

2') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго убывающей, если

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} > \cdots$$

3') Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется строго монотонной, если она является строго возрастающей или строго убывающей.

2⁰. Теорема 1. О сходимости монотонной последовательности

1) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и ограничена сверху, то она сходится,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_n x_n .$$

2) Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает и ограничена снизу, то она сходится,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf_n x_n .$$

Доказательство.

2) Положим $m = \inf\limits_n x_n$ и покажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} m$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдется номер такой n_0, что $x_{n_0} < m + \varepsilon$. Для любого $n \ge n_0$ выполнены неравенства

$$m \le x_n \le x_{n_0} < m + \varepsilon,$$

очевидным образом влекущие неравенство

$$|x_n - m| < \varepsilon .$$

Дополнение. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и не ограничена сверху, то $x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$. Всякая возрастающая последовательность имеет предел, может быть, равный $+\infty$. (Термин *сходящаяся* относится только к последовательностям с конечным пределом).

3⁰. Теорема 2. О вложенных отрезках.

Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность вложенных отрезков:

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \ (n = 1, 2, \ldots),$$

причем $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Тогда отрезки этой последовательности имеют общую точку и только одну:

$$\exists! c \in [a_n, b_n],\ n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство.

Рассмотрим последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ концов отрезков. Первая из этих последовательностей возрастает, а вторая убывает, при этом $a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Такие последовательности называются встречными. Первая последовательность ограничена сверху:

$$a_n \le b_n \le b_1 .$$

По теореме 1 $\{a_n\}$ сходится. Положим $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Поскольку $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то и $b_n \underset{n\to\infty}{\to} c$. Справедливы неравенства $a_n \le c \le b_n$, т.е. $c \in [a_n, b_n]$ $n = 1, 2, \ldots$

Допустив, что наши отрезки содержат еще и точку $d \ne c$, например, $d > c$, мы увидим, что $b_n - a_n \ge d - c > 0$, вопреки условию $b_n - a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Замечание. Существенно, что рассматривается последовательность **отрезков.** Последовательность интервалов может иметь пустое пересечение. Примером служит последовательность $\left(0, \frac{1}{n}\right)$.

4⁰. Число e.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Воспользовавшись биномиальной формулой, можно написать

$$x_n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n},$$

$$x_n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Соответственно для x_{n+1} получается выражение

$$x_{n+1} = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

При переходе от x_n к x_{n+1} все слагаемы увеличиваются и появляется дополнительное положительное слагаемое. Следовательно, $x_n < x_{n+1}$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ строго возрастает.

Далее,

$$x_n \le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} \le 2+1=3,$$

последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху. По теореме 1 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Определение

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e = 2.7182818284590452\ldots$

§ 8. Нижний и верхний пределы последовательности

1⁰. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность.

Положим $y_n = \inf\{x_n,\ x_{n+1},\ldots\}$, $z_n = \sup\{x_n,\ x_{n+1},\ldots\}$. Тогда $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — монотонные ограниченные последовательности.

Определение

Число $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ называется нижним пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается через $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Число $L = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$ называется верхним пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается через $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Замечание. Для неограниченных последовательностей можно ввести бесконечные верхний и нижний пределы.

Теорема1.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность.

Для сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно равенство верхнего и нижнего пределов:

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$$

В случае сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$

Доказательство.

1) **Необходимость.** Пусть последовательность сходится, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N, что при всех $n > N$ выполняются неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon .$$

Если $n > N$, то $\{x_n,\ x_{n+1},\ldots\} \subset (a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, $a - \varepsilon \le y_n \le z_n \le a + \varepsilon$. Сказанное означает, что $y_n,\ z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, число a выполняет роль как нижнего, так и верхнего предела.

2) **Достаточность.** Положим $a = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$ и покажем, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Поскольку $y_n \le x_n \le z_n$, а $y_n,\ z_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то по теореме о милиционерах $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

§ 9. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса

Теорема 2. Принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.

Из ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность

Доказательство

Докажем более сильное утверждение. Существует подпоследовательность, сходящаяся к верхнему пределу последовательности.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная последовательность, $L=\overline{\lim}\, x_n$. Построим подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} L$. Введем в рассмотрение последовательность $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \ldots\} \underset{n\to\infty}{\to} L$. Построение подпоследовательности проведем по индукции. Положим $n_1 = 1$.

Подберем $n_2 > n_1$ так, чтобы $z_{n_1+1} - \frac{1}{2} < x_{n_2} \le z_{n_1+1}$. Вообще, $n_{k+1} > n_k$ подбираем так, чтобы $z_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} < x_{n_{k+1}} \le z_{n_k+1}$. Тем самым построена подпоследовательность $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} L$.

§ 10 Критерий Коши

1⁰. Определение

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной (последовательностью Коши, сходящейся в себе), если выполнено условие Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,\ n > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

Удобно записывать условие Коши и в несколько иной форме:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad p = 1, 2, \ldots\ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Еще при выполнении условия Коши пишут

$$x_n - x_m \underset{n,m\to\infty}{\to} 0 .$$

2^0. Теорема 1. Критерий Коши

Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство

1) **Необходимость.** Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению предела найдется такой номер N , что при $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon / 2$. Пусть $m,\ n > N$, тогда

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \le |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \ \forall m,\ n > N\ |x_n - x_m| < \varepsilon$, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ оказывается фундаментальной.

Необходимость легко получена из свойств расстояния и справедлива в любом пространстве, в котором определяется понятие сходимости. Достаточность же условия Коши есть новая форма свойства полноты.

2) **Достаточность.** Нет сомнения в том, что фундаментальная последовательность обязана быть ограниченной. Мы можем рассмотреть нижний и верхний пределы нашей последовательности. Воспользуемся еще раз последовательностями $y_n = \inf\{x_n,\ x_{n+1}, \ldots\},\ z_n = \sup\{x_n,\ x_{n+1}, \ldots\}$, с помощью которых определены нижний и верхний пределы. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию Коши можно подобрать номер N , такой что при $n,\ m > N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Пусть $n > N$, тогда элементы множества $\{x_n,\ x_{n+1}, \ldots\}$ удалены друг от друга на расстояние, меньшее ε, $z_n - y_n \le \varepsilon$. Мы приходим к равенству пределов l и L последовательностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, что в силу Т.1 § 8 влечет сходимость нашей последовательности.

(Проведем последнее рассуждение подробнее. Пусть $k > N$. Тогда

$$\forall m, n \ge k \quad x_m - x_n < \varepsilon,\ \ x_m < x_n + \varepsilon .$$

Перейдем к верхней грани по m: $z_k \le x_n + \varepsilon,\ z_k - \varepsilon \le x_n$.

Перейдем к нижней грани по n: $z_k - \varepsilon \le y_k,\ \ 0 \le z_k - y_k \le \varepsilon$.

Переход к пределу дает неравенство $0 \le L - l \le \varepsilon$. Поскольку неравенство должно выполняться при любом $\varepsilon > 0$, мы приходим к выводу, что $L = l$, т.е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится).