§ 4 Формула Грина

Теорема 1.

Пусть G — область на плоскости, ограниченная простым контуром Γ. P, Q непрерывно дифференцируемы на $\bar{G}$.

Тогда имеет место формула Грина

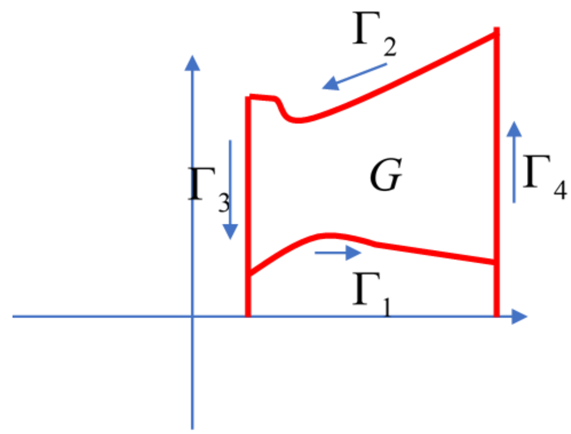
$$\oint\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (1)$$

Γ^+ — положительно ориентированный (пробегаемый в направлении против часовой стрелки) контур.

Доказательство.

Докажем формулу

$$\oint\limits_{\Gamma^+} Pdx = -\iint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy. \qquad (2)$$



Пусть сначала G — криволинейная трапеция, $\bar{G} = \{(x, y) \mid x \in [a, b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$, контур Γ состоит из четырех участков: графика Γ_1 функции φ, пробегаемого слева направо, графика Γ_2 функции ψ, пробегаемого справа налево, и вертикальных отрезков Γ_3, Γ_4. При этом

$$\int\limits_{\Gamma_1} Pdx = \int\limits_a^b P(x, \varphi(x))dx,\ \int\limits_{\Gamma_2} Pdx = -\int\limits_a^b P(x, \psi(x))dx,\ \int\limits_{\Gamma_3} Pdx = \int\limits_{\Gamma_4} Pdx = 0.$$

$$\iint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dy = \int\limits_a^b dx\, P(x, y)\Big|_{\varphi(x)}^{\psi(x)} =$$

$$= \int\limits_a^b \big(P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x)) \big) dx = -\int\limits_{\Gamma_2} P\ dx - \int\limits_{\Gamma_1} P\ dx = -\int\limits_{\Gamma} P\ dx\ /$$

Более сложное множество следует вспомогательными линиями разрезать на части $G_1, \ldots, G_m$ рассмотренного вида.

$$\iint\limits_{\bar{G}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_{i=1}^m \iint\limits_{\bar{G}_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\sum_{i=1}^m \oint\limits_{\Gamma_i^+} Pdx = -\oint\limits_{\Gamma^+} Pdx$$

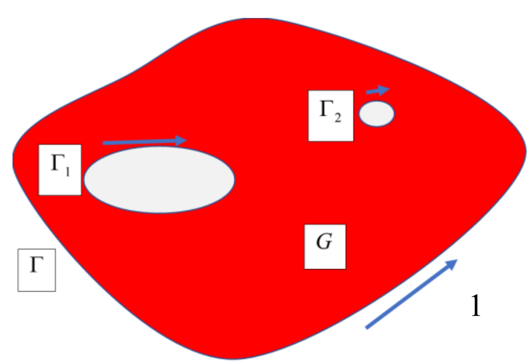
(в сумме интегралы по всем вспомогательным линиям встречаются дважды с противоположными ориентациями, интегралы по вспомогательным линиям взаимно уничтожаются, остальные линии вместе составляют контур Γ^+).

Следствие.

$$\mu \bar{G} = \frac{1}{2} \oint\limits_{\Gamma^+} xdy - ydx.$$

Дополнение. Формула Грина для многосвязной области.

$$\oint\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^m \oint\limits_{\Gamma_i^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\bar{G}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$



§ 5 Условия независимости криволинейного интеграла II рода на плоскости от пути

1^0. Понятие независимости интеграла от пути.

Пусть ω — дифференциальная форма в области G на плоскости. Мы скажем, что $\int\limits_\gamma \omega$ не зависит от пути, если для любых путей в G с общим началом и общим концом интеграл принимает одинаковые значения.

Пример $\int xdy$. Рассмотрим два пути с началом $(0,0)$ и концом $(1,1)$. Первый путь γ_1 состоит из отрезка оси абсцисс и вертикального отрезка прямой $x=1$, второй γ_2 — из отрезка оси ординат и горизонтального отрезка прямой $y=1$,

$$\int\limits_{\gamma_1} xdy = 0+1=1,\ \int\limits_{\gamma_2} xdy = 0+0=0 .$$

Интеграл, вообще говоря, зависит от пути.

2^0. **Предложение.** Интеграл не зависит от пути интегрирования в том и только в том случае, если интеграл равен нулю по любому замкнутому пути.

Доказательство. Пусть интеграл не зависит от пути интегрирования, γ — замкнутый путь ($\gamma:[a,b]\to G$). Выберем $c\in(a,b)$ и рассмотрим пути $\gamma_1=\gamma|_{[a,c]}$ и $\gamma_2=\gamma|_{[c,b]}$. Путь γ является соединением путей γ_1 и γ_2, поэтому $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma_1}\omega + \int\limits_{\gamma_2}\omega$. Но пути γ_1 и $(\gamma_2)_-$ имеют общие начало и конец, так что

$$\int\limits_{\gamma_1}\omega = \int\limits_{(\gamma_2)_-}\omega = -\int\limits_{\gamma_2}\omega,\ \int\limits_\gamma \omega = 0 .$$

Наоборот, если интеграл обращается в нуль на любом замкнутом пути, то для любых путей γ_1, γ_2 с общим началом и общим концом нулевое значение примет интеграл $\int\limits_\gamma \omega$ по замкнутому пути — соединению путей γ_1 $(\gamma_2)_-$, $\int\limits_{\gamma_1}\omega - \int\limits_{\gamma_2}\omega = 0$, что и требовалось.

3^0.Точные формы.

Определение Дифференциальная форма ω называется точной в области G, если она является дифференциалом некоторой непрерывно дифференцируемой в области G функции F, если

$$\omega = dF \text{ , т.е. } P=\frac{\partial F}{\partial x},\ Q=\frac{\partial F}{\partial y} .$$

Функция F называется первообразной дифференциальной формы ω.

Теорема 1. 1) Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть ω — точная форма, F — ее первообразная, γ — путь с началом $(x_1,\ y_1)$ и концом $(x_2,\ y_2)$.

Тогда

$$\int\limits_\gamma \omega = F(x,\ y)\Big|_{(x_1,\ y_1)}^{(x_2,\ y_2)} = F(x_2,\ y_2) - F(x_1,\ y_1) . \qquad (1)$$

2) Интеграл от точной формы не зависит от пути.

Доказательство.

$$\int_{\gamma}\omega=\int_{a}^{b}\Big(P\big(\varphi(t),\,\psi(t)\big)\varphi'(t)+Q\big(\varphi(t),\,\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)\,dt\,.$$

Рассмотрим функцию $G: G(t)=F\big(\varphi(t),\,\psi(t)\big)$. Эта функция имеет производную

$$G'=\frac{\partial F}{\partial x}\varphi'+\frac{\partial F}{\partial y}\psi'\,.$$

По формуле Ньютона-Лейбница для определенного интеграла

$$\int_{\gamma}\omega=G(b)-G(a)=F(x_2,\,y_2)-F(x_1,\,y_1)\,.$$

Независимость интеграла от пути следует теперь из формулы Ньютона-Лейбница.

Теорема 2. О существовании первообразной

Пусть G — область на плоскости, $\omega=Pdx+Qdy$ — дифференциальная форма в G, $\int_{\gamma}\omega$ не зависит от пути.

Тогда ω — точная форма, существует функция F, для которой $\omega=dF$.

Доказательство.

Фиксируем точку $A_0(x_0,\,y_0)\in G$.

Пусть $A(x,\,y)\in G$, соединим A_0 с A путем $\gamma_A=\gamma_{(x,\,y)}$ и положим

$$F(x,\,y)=\int_{\gamma_{x,y}}\omega\,.$$

Независимость интеграла от пути обеспечивает корректность определения.

Убедимся в том, что построена первообразная для дифференциальной формы ω.

Проверим, например, равенство

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\,.$$

Пусть $A_1(x_1,\,y_1)\in G$, γ соединяет A_0 и A_1; $A(x_1+h,\,y_1)\in G$, γ_h — прямолинейный путь, соединяющий A_1 и A:

$$\gamma_h:\begin{cases}x=x_1+t,\\ y=y_1, \qquad t\in[0,\,h]\end{cases}$$

Путь γ, составленный из γ_1 и γ_h, соединяет A_0 и A,

$$F(x_1,\,y_1)=\int_{\gamma_1}\omega,\quad F(x_1+h,\,y_1)=\int_{\gamma}\omega,$$

$$\alpha(h)=F(x_1+h,\,y_1)-F(x_1,\,y_1)=\int_{\gamma_h}\omega=\int_{0}^{h}P(x_1+t,\,y_1)dt$$

По теореме Барроу

$$\alpha'(0)=P(x_1,\,y_1)/\,.$$

С другой стороны, по определению частной производной

$$\alpha'(0)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,\,y_1)\,.$$

Итак,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_1,\,y_1)=P(x_1,\,y_1)\,.$$

Замечания

1) Строение множества первообразных.

Если F — первообразная для формы ω в области G, то и любая функция $F+C$ является первообразной. Если $F_1,\ F_2$ — первообразные, то $F_2-F_1=const$.

2) Построение первообразной в круге и квадрате. Если G — круг или квадрат, путь γ_A можно составить из отрезков, параллельных координатным осям. Для первообразной получаются формулы

$$\begin{aligned} F(x,\ y) &= \int_{x_0}^{x} P(\xi,\ y_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x,\ \eta)\,d\eta, \\ F(x,\ y) &= \int_{x_0}^{x} P(\xi,\ y)\,d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ \eta)\,d\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

4^0. Замкнутые формы.

Определение. Дифференциальная форма ω в области G называется замкнутой, если она локально точна, если каждая точка $(x,\ y)\in G$ имеет окрестность, в которой форма точна.

Пример

$$\omega=\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},\ G=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,\ 0)\}.$$

$$\gamma:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi] \end{cases}\ \int_{\gamma}\omega=\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi\neq 0,$$

форма не является точной.

Функция

$$F_1: F_1(x,\ y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

является первообразной для ω в правой и левой полуплоскостях, а функция

$$F_2: F_2(x,\ y)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$$

является первообразной для ω в верхней и нижней полуплоскостях, ω — замкнутая форма.

Функция

$$F: F(x,y)=\begin{cases} F_1(x,\ y),\ x>0, \\ F_2(x,\ y),\ y>0, \\ F_2(x,\ y)-\pi,\ y<0 \end{cases}$$

является первообразной для ω в плоскости с разрезом по отрицательной полуоси абсцисс.

Попытка дальнейшего продолжения первообразной приводит к противоречию, поскольку

$$F(-1,\ +0)=\pi,\ F(-1,\ -0)=-\pi.$$

5^0. Гомотопия

Определение

1) Непрерывное отображение

$$\Gamma:[a,\ b]\times[0,\ 1]\to\mathbb{R}^2$$

называется гомотопией.

Введем в рассмотрение пути $\gamma_s,\ s\in[0,\ 1]$:

$$\gamma_s(t)=\Gamma(t,\,s),\,t\in[a,\,b].$$

Гомотопия — непрерывная деформация пути γ_0 в путь γ_1.

Пути γ_0 и γ_1 называются гомотопными.

2) Пути называются гомотопными в области G, если их связывает гомотопия со значениями в G.

3) Пути называются гомотопными, как пути с общими началом и концом, если для них можно подобрать гомотопию Γ, для которой

$$\forall s\in[0,\,1]\;\Gamma(a,\,s)=\gamma_0(a)=\gamma_1(a),\;\Gamma(b,\,s)=\gamma_0(b)=\gamma_1(b)$$

4) Пути называются гомотопными, как замкнутые пути, если для них можно подобрать гомотопию Γ, для которой путь γ_s является замкнутым при любом $s\in[0,\,1]$.

6^0. Теорема 3.

Пусть ω — замкнутая форма в области G, пути γ_0 и γ_1 гомотопны в области G, как замкнутые пути.

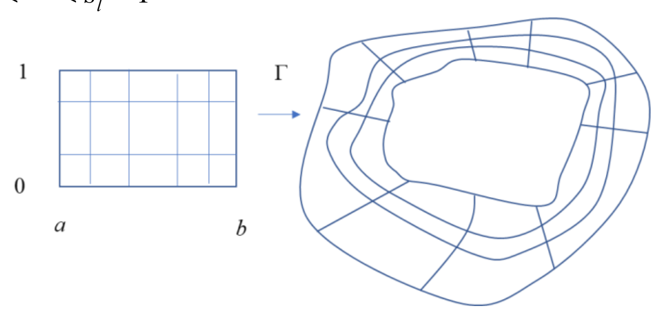
Тогда

$$\int_{\gamma_0}\omega=\int_{\gamma_1}\omega$$

Доказательство. Подберем разбиения

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_k=b,$$
$$0=s_0<s_1<\cdots<s_l=1$$

отрезков $[a,\,b]$ и $[0,\,1]$, настолько мелкие, что образ $\Gamma(\Delta_{ij})$ каждого из прямоугольников $\Delta_{ij}=[t_{i-1},\,t_i]\times[s_{j-1},\,s_j]$ ($i=1,\ldots,k;\;j=1,\ldots,l$) лежит в области точности формы ω.



Пусть η_{ij} — контур клетки $\Delta'_{ij}=\Gamma(\Delta_{ij})$, тогда

$$\int_{\eta_{ij}^+}\omega=0,\;0=\sum_{i,j}\int_{\eta_{ij}^+}\omega=\int_{\gamma_0}\omega-\int_{\gamma_1}\omega.$$

В состав контуров η_{ij} входят участки путей $\gamma_{0,}\;\gamma_1$ и вспомогательные линии. Каждая вспомогательная линия пробегается дважды в противоположных направлениях. Интегралы по вспомогательным линиям взаимно уничтожаются. Участки пути γ_0 входят в контуры η_{ij} с правильным, а участки γ_1 со встречным направлением. При суммировании формируются интегралы $\int_{\gamma_0}\omega$ и $\int_{\gamma_1^-}\omega$.

7^0. Определение. Область G называется односвязной, если в ней каждый замкнутый путь гомотопен (как замкнутый путь) пути с одноточечным носителем (стационарному пути).

В односвязной области каждый замкнутый путь стягивается в точку.

Теорема 4. Если дифференциальная форма ω замкнута в односвязной области G, то она точна.

Доказательство. Пусть γ — замкнутый путь в области G. Путь γ гомотопен некоторому стационарному пути γ_0. По теореме 3 $\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_{\gamma_0} \omega$. Поскольку интеграл по стационарному пути равен нулю, то получается, что $\int\limits_\gamma \omega = 0$ для любого замкнутого пути γ, интеграл не зависит от пути. По теореме 2 ω — точная форма.

8⁰. Аналитический признак замкнутости.

Теорема 5. $\omega = Pdx + Qdy$ — дифференциальная форма в области G, P, Q непрерывно дифференцируемы.

Тогда

$$\omega \text{ замкнута} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ω — замкнутая форма. Для произвольной точки $(x, y) \in G$ можно подобрать окрестность V, в которой дифференциальная форма является точной. В окрестности V определена первообразная F дифференциальной формы ω,

$$P = \frac{\partial F}{\partial x},\ Q = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Так что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ по теореме о смешанных частных производных.

Достаточность. Возьмем произвольную точку $(x_0,\ y_0) \in G$, подберем прямоугольник $\Pi \subset G$ с центром в этой точке. Для $(x,\ y) \in G$ положим

$$F(x,\ y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)\ d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)\ d\eta.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,\ y) = P(x,\ y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,\ \eta)\ d\eta =$$

$$= P(x,\ y_0) + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x,\ \eta)\ d\eta = P(x,\ y_0) + P(x,\ y) - P(x,\ y_0) = P(x,\ y).$$

(Законность дифференцирования под знаком интеграла установим позднее).

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,\ y) = Q(x,\ y).$$

Итак, F — первообразная для ω в Π, ω — замкнутая форма.

9⁰. Итоги. G — односвязная область, $\omega = Pdx + Qdy$ — дифференциальная форма в G.

Равносильны условия:

1) $\int\limits_\gamma \omega$ не зависит от пути;

2) $\int\limits_{\gamma} \omega = 0$ для любого замкнутого пути;

3) ω — точная форма;

4) ω — замкнутая форма;

5) $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.