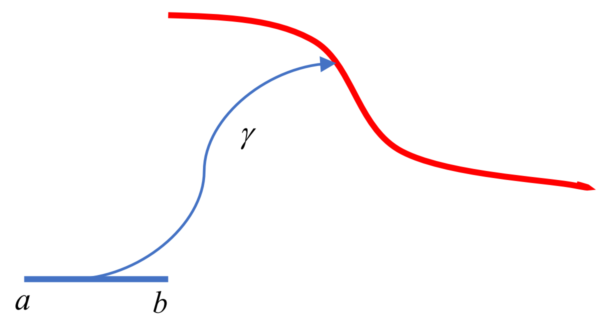
Глава III Криволинейные интегралы

§ 1. Путь и кривая

Непрерывное отображение $\gamma:[a,\,b]\to\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ называется путем в пространстве $\mathbb{R}^3$ (на плоскости $\mathbb{R}^2$). Если отображение γ m раз непрерывно дифференцируемо, говорят, что γ — путь класса C^m. Если γ' ни в одной точке не обращается в нуль, путь называется гладким. Вектор $\vec{a}=\gamma'(t)$ — касательный вектор пути.



Пути γ и $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\lambda$, где λ и λ^{-1} строго возрастают и непрерывно дифференцируемы, называются эквивалентными. Путь $\gamma_-(\tau)=\gamma(a+b-\tau)$ называется встречным. Совокупность эквивалентных путей называется кривой.
Впрочем, иногда кривой называют просто носитель пути.

Гладкий путь спрямляем, его длина вычисляется по формуле $L=\int\limits_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|dt$. В качестве параметра на гладком пути можно использовать переменную длину дуги $s=l(t)=\int\limits_a^t\left\|\gamma'(\tau)\right\|d\tau$. Параметризацию длиной дуги называют естественной. В естественной параметризации $\left\|\dot{\gamma}(s)\right\|=1$

§ 2. Криволинейный интеграл первого рода

1⁰. Определение

Пусть

$$\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t) \text{ — путь класса } C^1,$$

f — непрерывная функция, определенная по крайней мере на носителе этого пути.
Число

$$I=\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\left\|\gamma'(t)\right\|dt=\int\limits_a^b f(\gamma(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi^2(t)+\chi'^2(t)}dt \qquad (1)$$

называется криволинейным интегралом I рода.
В случае естественной параметризации формула (1) принимает вид

$$\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_0^L f(\gamma(s))ds \qquad (2)$$

2⁰. Независимость интеграла от параметризации и ориентации

Если $\gamma\sim\tilde{\gamma}$, то

$$\int\limits_\gamma f\,dl=\int\limits_{\tilde{\gamma}} f\,dl\,. \qquad (4)$$

Действительно,

$$\int\limits_{\gamma} f\,dl = \int\limits_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|dt = \left[t = \lambda\left(\tau\right)\right] = \int\limits_{\tilde a}^{\tilde b} f\left(\gamma\left(\lambda\left(\tau\right)\right)\right)\left\|\gamma'\left(\lambda\left(\tau\right)\right)\right\|\lambda'\left(\tau\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tilde a}^{\tilde b} f\left(\tilde\gamma\left(\tau\right)\right)\left\|\tilde\gamma'\left(\tau\right)\right\|d\tau = \int\limits_{\tilde\gamma} f\,dl$$

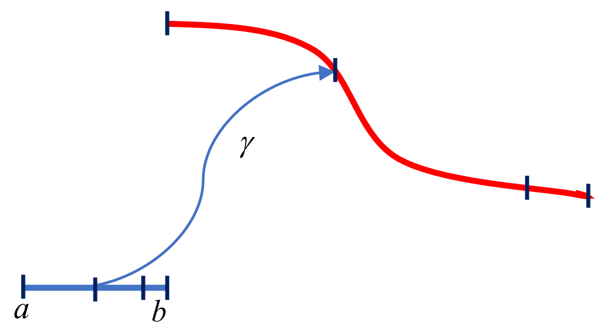
Интеграл I рода не меняет своего значения при переходе к встречному пути:

$$\int\limits_{\gamma} f\,dl = \int\limits_{\gamma_-} f\,dl\,. \tag{5}$$

$$\int\limits_{\gamma} f\,dl = \int\limits_a^b f\left(\gamma\left(t\right)\right)\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|dt = \left[t = a+b-\tau\right] = \int\limits_a^b f\left(\gamma\left(a+b-\tau\right)\right)\left\|\gamma'\left(a+b-\tau\right)\right\|d\tau =$$

$$= \int\limits_{\tilde a}^{\tilde b} f\left(\gamma_-\left(\tau\right)\right)\left\|\gamma_-'\left(\tau\right)\right\|d\tau = \int\limits_{\gamma_-} f\,dl$$

Если γ — простой (γ — инъекция) гладкий путь, то любая простая гладкая параметризация носителя Γ пути γ даст одно и то же значения интеграла. Поэтому можно говорить об интеграле $\int\limits_{\Gamma} fdl$ по носителю Γ пути γ.



3⁰. Криволинейный интеграл I рода — предел совокупности интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^{m} f\left(\gamma\left(\xi_k\right)\right)\Delta l_k \text{, где } \Delta l_k \text{ — длина } k\text{-го участка пути.}$$

4⁰. **Основные свойства**

1) $\int\limits_{\gamma} dl$ — длина пути.

2) **Линейность**

$$\int\limits_{\gamma}\left(\alpha f + \beta g\right)dl = \alpha\int\limits_{\gamma} fdl + \beta\int\limits_{\gamma} gdl\,. \tag{6}$$

3) **Аддитивность**

Если путь γ составлен из путей γ_1 и γ_2, то

$$\int\limits_{\gamma} fdl = \int\limits_{\gamma_1} fdl + \int\limits_{\gamma_2} fdl\,. \tag{7}$$

С учетом свойства аддитивности определение криволинейного интеграла распространяется на кусочно-гладкие пути (составленные из гладких).

4) **Монотонность.**

Если $f \le g$, то

$$\int\limits_{\gamma} fdl \le \int\limits_{\gamma} gdl\,. \tag{8}$$

Монотонность влечет за собой известные оценки и теорему о среднем.

5⁰. **Физический смысл.**

Если $f \geq 0$ — плотность материальной кривой, то $\int\limits_{\gamma} f dl$ — масса.

6^0. Криволинейный интеграл первого рода на плоскости.
Если плоский путь γ определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad t \in [a,\, b],$$

$$\text{то } \int\limits_{\gamma} f dl = \int\limits_a^b f\left(\varphi(t),\, \psi(t)\right)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt .$$

Если интегрирование ведется по графику Γ непрерывной функции ψ, то

$$\int\limits_{\Gamma} f dl = \int\limits_a^b f\left(x,\, \psi(x)\right)\sqrt{1 + \psi'^2(x)}dx .$$

§ 3. Криволинейный интеграл второго рода.

Интегрирование линейных дифференциальных форм

1^0. Линейные дифференциальные формы
Выражение

$$Pdx + Qdy + Rdz ,$$

где P, Q, R — достаточно гладкие функции трех переменных в области G, называется линейной дифференциальной формой. Дифференциальная форма является отображением области G в пространство линейных форм, каждой точке (x, y, z) ставится в соответствие линейная функция, действующая по формуле

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \\ \xi^z \end{pmatrix} \mapsto \omega(x, y, z)(\xi) = P(x, y.z)\xi^x + Q(x, y.z)\xi^y + R(x, y.z)\xi^z$$

В пространстве $\mathbb{R}^2$ дифференциальные формы записываются в виде $Pdx + Qdy$, в $\mathbb{R}$ дифференциальная форма имеет вид Pdx.

Примеры.

1) F — непрерывно дифференцируемая функция, дифференциал $dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dx + \frac{\partial F}{\partial z}dz$ — дифференциальная форма. Дифференциал dF является линейной функцией (линейной формой), действующей по формуле $dF(\xi) = \frac{\partial F}{\partial x}\xi^x + \frac{\partial F}{\partial y}\xi^y + \frac{\partial F}{\partial z}\xi^z$. Каждой точке $(x, y, z) \in G$ поставлена в соответствие линейная форма.

(Если под x понимать координату точки в трехмерном пространстве, то эта функция имеет форму dx своим дифференциалом).

2) Векторному полю $\vec{f} = f_x\overline{i} + f_y\overline{j} + f_z\overline{k}$ отвечает дифференциальная форма $\vec{f} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$.

2^0. Интеграл от дифференциальной формы (криволинейный интеграл II рода)

Определенный интеграл $\int\limits_a^b P(x)\,dx$ можно считать интегралом от дифференциальной формы: промежуток разбиваем на участки $\Delta x_1,\dots,\Delta x_m$, вычисляем значения $P\Delta x_k$ дифференциальной формы на приращениях $\Delta x_1,\dots,\Delta x_m$, складываем их, тем самым формируем интегральную сумму. В проведенном построении можно рассмотреть и случай $a>b$ и отрицательными Δx_k.

Определение 1. Пусть G — область в $\mathbb{R}^3$,

$\gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ t\in[a,b]$ — путь класса C^1, в этой области.

Определим операцию переноса дифференциальной формы

$$\omega = Pdx + Qdy + rdz$$

На промежуток $[a,b]$ отображением γ :

$$\begin{aligned}
&\omega^*(t)(\xi)=\omega(\gamma(t))(d\gamma(t,\xi))=\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)\xi)=\\
&=\big(P(\gamma(t))\varphi'(t)+Q(\gamma(t))\psi'(t)+R(\gamma(t))\chi'(t)\big)\xi,\\
&\omega^*(t)=\omega(\gamma(t))(d\gamma(t,\xi))=\omega(\gamma(t))(\gamma'(t)\xi)=\\
&=\big(P(\gamma(t))\varphi'(t)+Q(\gamma(t))\psi'(t)+R(\gamma(t))\chi'(t)\big)dt.
\end{aligned}$$

Выражение ω^* получается из ω заменой dx,dy,dz на дифференциалы функций φ,ψ,χ соответственно.

Определение 2. Интегралом от дифференциальной формы ω вдоль γ называется интеграл перенесенной формы ω^*:

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t))\,dt\,. \tag{1}$$

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b \big(P(\gamma(t))\varphi'(t)+Q(\gamma(t))\psi'(t)+R(\gamma(t))\chi'(t)\big)dt \tag{2}$$

Такое соглашение оправдывается той точкой зрения, что формы ω и ω^* являются представлениями одного и того же объекта и должны поэтому иметь общее значение интеграла.

В $\mathbb{R}^2$ интеграл от дифференциальной формы определяется формулой

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_\gamma Pdx+Qdy = \int\limits_a^b \big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)dt. \tag{3}$$

Для интеграла по графику $\Gamma: y=\psi(x)$ и горизонтальному отрезку $y=y_0$ с направлением движения слева направо имеем соответственно формулы

$$\begin{aligned}
&\Gamma: y=\psi(x), \quad \int\limits_\Gamma Pdx=\int\limits_a^b P(x,\,\psi(x))dx,\ \int\limits_\Gamma Qdy=\int\limits_a^b Q(x,\,\psi(x))\psi'(x)dx;\\
&\Gamma: y=y_0, \quad \int\limits_\Gamma Pdx=\int\limits_a^b P(x,\,y_0)dx,\ \int\limits_\Gamma Qdy=0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Интеграл от дифференциальной формы можно представить пределом интегральных сумм

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\lim_{\lambda_\tau\to 0}\sum_{k=1}^{m}\omega\left(\xi_k\right)\left(\Delta x_k\right),\ \text{здесь } \Delta x_k=\gamma\left(t_k\right)-\gamma\left(t_{k-1}\right).$$

Интеграл от линейной дифференциальной формы называется еще криволинейным интегралом II рода.

3^0. Интегралы по эквивалентным и встречным путям

Предложение 1. Интеграл от дифференциальной формы не зависит от параметризации. Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ — эквивалентные пути. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\tilde{\gamma}}\omega$$

Действительно, $\tilde{\gamma}=\gamma\circ\lambda,\ \lambda'>0$ и требуемое равенство получается из формулы замены переменной в определенном интеграле:

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{a}^{b}\omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt=\big[t=\lambda(s)\big]=\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\omega\Big(\gamma\big(\lambda(s)\big)\Big)\Big(\gamma'\big(\lambda(s)\big)\lambda'(s)\Big)ds=$$

$$=\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\omega\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\big(\tilde{\gamma}'(s)\big)ds=\int\limits_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}\omega\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\big(\tilde{\gamma}'(s)\big)ds=\int\limits_{\tilde{\gamma}}\omega$$

Предложение 2. Интегралы по встречным путям взаимно противоположны.

$$\int\limits_{\gamma_-}\omega=-\int\limits_{\gamma_-}\omega$$

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{a}^{b}\omega\big(\gamma(t)\big)\big(\gamma'(t)\big)dt=\big[t=a+b-s\big]=\int\limits_{a}^{b}\omega\big(\gamma(a+b-s)\big)\big(\gamma'(a+b-s)\big)ds=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\omega\big(\gamma_-(s)\big)\big(-\gamma_-'(s)\big)ds=-\int\limits_{\gamma_-}\omega$$

4^0. Криволинейный интеграл II рода обладает свойствами линейности и аддитивности (линейности относительно дифференциальной формы , аддитивности относительно пути):

$$\int\limits_{\gamma}\left(\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2\right)=\alpha_1\int\limits_{\gamma}\omega_1+\alpha_2\int\limits_{\gamma}\omega_2\ ,$$

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+\int\limits_{\gamma_2}\omega,$$

если γ составлен из γ_1 и γ_2.

Если Γ — носитель простого замкнутого пути, то можно определить интеграл $\int\limits_{\Gamma}\omega$, при этом следует уточнить направление движения по линии Γ.

5^0. Связь криволинейных интегралов I и II рода.

Пусть γ — гладкий путь, $\bar{a}=\gamma'(t)$ — касательный вектор пути γ, $\dfrac{\bar{a}}{|a|}$ — единичный касательный вектор. Его координаты – это направляющие косинусы пути:

$$\cos\lambda=\frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}},\ \cos\mu=\frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}},\ \cos\nu=\frac{\chi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}}.$$

Видим, что

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\gamma}\left(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu\right)dl\,.$$

С другой стороны, рассмотрим на пути γ дифференциальную форму

$$\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz$$

и вычислим ее интеграл вдоль пути γ:

$$\int\limits_{\gamma}\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz=\int\limits_{a}^{b}\frac{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}}dt=$$

$$=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}dt=l(\gamma)$$

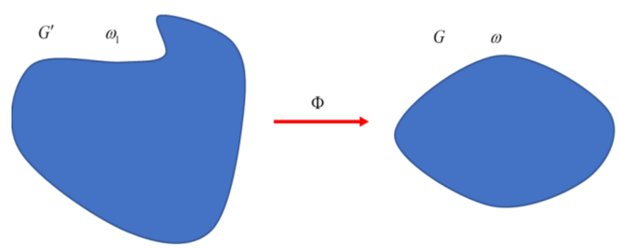
Дифференциальная форма $dl=\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz$ называется дифференциальной формой длины пути. Теперь на криволинейный интеграл I рода $\int\limits_{\gamma}fdl$ можно смотреть как на интеграл от дифференциальной формы $f\cdot\left(\cos\lambda dx+\cos\mu dy+\cos\nu dz\right)$

6⁰. Физический смысл интеграла II рода. Сила $\vec{F}$ на перемещении $\Delta\vec{r}$ выполняет работу $\left(\vec{F},\,\Delta\vec{r}\right)$. Вдоль пути γ сила $\vec{F}$ выполняет работу

$$\int\limits_{\gamma}\left(\vec{F},\,d\vec{r}\right)=\int\limits_{\gamma}F_xdx+F_ydy+F_zdz\,.$$

7⁰. Перенос линейных дифференциальных форм.

$\Phi:G'\to G$ — непрерывно дифференцируемое отображение, ω — дифференциальная форма в области G. Определим дифференциальную форму $\omega_1=\Phi^*\omega$ в области G':



$$\omega_1(u)(\Delta u)=\omega\left(\Phi(u)\right)\left(d\Phi(u,\Delta u)\right)$$

Если γ_1 — путь в области G', $\gamma=\Phi\circ\gamma_1$ — соответствующий путь в области G. Тогда

$$\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega_1\,.$$

$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ — дифференциальная форма,

$$\Phi:\begin{cases}x=f(u,v,w),\\ y=g(u,v,w),\\ z=h(u,v,w)\end{cases}$$ — координатная запись отображения Φ.

Для $\Delta u(\xi,\,\eta,\,\zeta)$ имеем

$$d\Phi(\Delta u)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\xi+\frac{\partial f}{\partial v}\eta+\frac{\partial f}{\partial w}\zeta\\ \frac{\partial g}{\partial u}\xi+\frac{\partial g}{\partial v}\eta+\frac{\partial g}{\partial w}\zeta\\ \frac{\partial h}{\partial u}\xi+\frac{\partial h}{\partial v}\eta+\frac{\partial h}{\partial w}\zeta\end{pmatrix},$$ так что

$$\omega_1(\Delta u) = P\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial u}\xi+\frac{\partial f}{\partial v}\eta+\frac{\partial f}{\partial w}\zeta\right)+Q\cdot\left(\frac{\partial g}{\partial u}\xi+\frac{\partial g}{\partial v}\eta+\frac{\partial g}{\partial w}\zeta\right)+R\cdot\left(\frac{\partial h}{\partial u}\xi+\frac{\partial h}{\partial v}\eta+\frac{\partial h}{\partial w}\zeta\right)=$$

$$=\left(P\frac{\partial f}{\partial u}+Q\frac{\partial g}{\partial u}+R\frac{\partial h}{\partial u}\right)\xi+\left(P\frac{\partial f}{\partial v}+Q\frac{\partial g}{\partial v}+R\frac{\partial h}{\partial v}\right)\eta+\left(P\frac{\partial f}{\partial w}+Q\frac{\partial g}{\partial w}+R\frac{\partial h}{\partial w}\right)\zeta,$$

$$\omega_1=\left(P\frac{\partial f}{\partial u}+Q\frac{\partial g}{\partial u}+R\frac{\partial h}{\partial u}\right)du+\left(P\frac{\partial f}{\partial v}+Q\frac{\partial g}{\partial v}+R\frac{\partial h}{\partial v}\right)dv+\left(P\frac{\partial f}{\partial w}+Q\frac{\partial g}{\partial w}+R\frac{\partial h}{\partial w}\right)dw=$$

$$=P_1du+Q_1dv+R_1dw,\ \text{где}$$

$$P_1=P\frac{\partial f}{\partial u}+Q\frac{\partial g}{\partial u}+R\frac{\partial h}{\partial u},\ Q_1=P\frac{\partial f}{\partial v}+Q\frac{\partial g}{\partial v}+R\frac{\partial h}{\partial v},\ R_1=P\frac{\partial f}{\partial w}+Q\frac{\partial g}{\partial w}+R\frac{\partial h}{\partial w}.$$

Видим, что форма ω_1 получается заменой в выражении для ω символов dx, dy, dz дифференциалами функций f, g, h.

Для интегралов получаем

$$\int_\gamma\omega=\int_a^b\left(P\varphi'+Q\psi'+R\chi'\right)dt=$$

$$=\int_a^b\left(P\left(\frac{\partial f}{\partial u}\varphi_1'+\frac{\partial f}{\partial v}\psi_1'+\frac{\partial f}{\partial w}\chi_1'\right)+Q\left(\frac{\partial g}{\partial u}\varphi_1'+\frac{\partial g}{\partial v}\psi_1'+\frac{\partial g}{\partial w}\chi_1'\right)+R\left(\frac{\partial h}{\partial u}\varphi_1'+\frac{\partial h}{\partial v}\psi_1'+\frac{\partial h}{\partial w}\chi_1'\right)\right)dt=$$

$$=\int_a^b\left(P_1\varphi_1'+Q_1\psi_1'+R_1\chi_1'\right)dt=\int_{\gamma_1}\omega_1$$