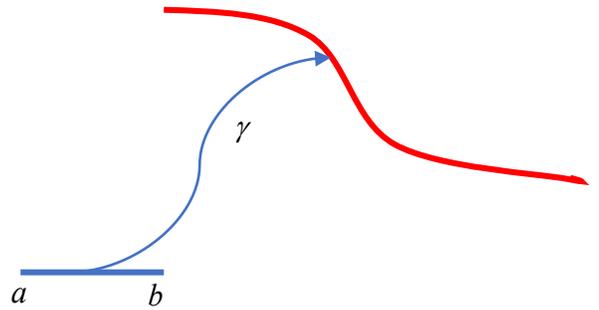


Глава III Криволинейные интегралы

§ 1. Путь и кривая

Непрерывное отображение $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ (на плоскости \mathbb{R}^2) называется путем в пространстве \mathbb{R}^3 (на плоскости \mathbb{R}^2). Если отображение γ m раз непрерывно дифференцируемо, говорят, что γ — путь класса C^m . Если γ' ни в одной точке не обращается в нуль, путь называется гладким. Вектор $\vec{a} = \gamma'(t)$ — касательный вектор пути.



Пути γ и $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \lambda$, где λ и λ^{-1} строго возрастают и непрерывно дифференцируемы, называются эквивалентными. Путь $\gamma_-(\tau) = \gamma(a+b-\tau)$ называется встречным. Совокупность эквивалентных путей называется кривой.

Впрочем, иногда кривой называют просто носитель пути.

Гладкий путь спрямляем, его длина вычисляется по формуле $L = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. В качестве

параметра на гладком пути можно использовать переменную длину дуги

$s = l(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$. Параметризацию длиной дуги называют естественной. В естественной

параметризации $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$

§ 2. Криволинейный интеграл первого рода

1⁰. Определение

Пусть

$$\gamma : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t) \text{ — путь класса } C^1,$$

f — непрерывная функция, определенная по крайней мере на носителе этого пути.

Число

$$I = \int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt \quad (1)$$

называется криволинейным интегралом I рода.

В случае естественной параметризации формула (1) принимает вид

$$\int_{\gamma} f dl = \int_0^L f(\gamma(s)) ds \quad (2)$$

2⁰. Независимость интеграла от параметризации и ориентации

Если $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, то

$$\int_{\gamma} f dl = \int_{\tilde{\gamma}} f dl. \quad (4)$$

Действительно,

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = [t = \lambda(\tau)] = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma(\lambda(\tau))) \|\gamma'(\lambda(\tau))\| \lambda'(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\tilde{\gamma}(\tau)) \|\tilde{\gamma}'(\tau)\| d\tau = \int_{\tilde{\gamma}} f dl$$

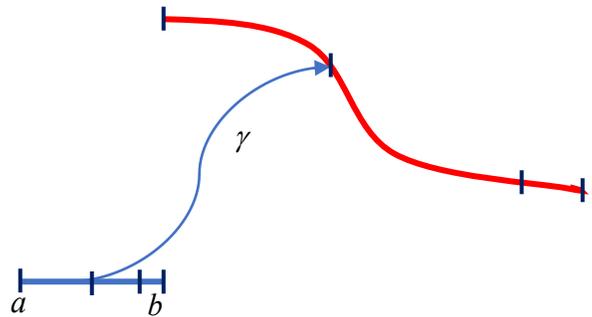
Интеграл I рода не меняет своего значения при переходе к встречному пути:

$$\int_{\gamma} f dl = \int_{\gamma_-} f dl. \quad (5)$$

$$\int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = [t = a + b - \tau] = \int_a^b f(\gamma(a + b - \tau)) \|\gamma'(a + b - \tau)\| d\tau =$$

$$= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f(\gamma_-(\tau)) \|\gamma'_-(\tau)\| d\tau = \int_{\gamma_-} f dl$$

Если γ — простой (γ — инъекция) гладкий путь, то любая простая гладкая параметризация носителя Γ пути γ даст одно и то же значения интеграла. Поэтому можно говорить об интеграле $\int_{\Gamma} f dl$ по носителю Γ пути γ .



3⁰. Криволинейный интеграл I рода — предел совокупности интегральных сумм

$$\sum_{k=1}^m f(\gamma(\xi_k)) \Delta l_k, \text{ где } \Delta l_k \text{ — длина } k\text{-го участка пути.}$$

4⁰. Основные свойства

1) $\int_{\gamma} dl$ — длина пути.

2) Линейность

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dl = \alpha \int_{\gamma} f dl + \beta \int_{\gamma} g dl. \quad (6)$$

3) Аддитивность

Если путь γ составлен из путей γ_1 и γ_2 , то

$$\int_{\gamma} f dl = \int_{\gamma_1} f dl + \int_{\gamma_2} f dl. \quad (7)$$

С учетом свойства аддитивности определение криволинейного интеграла распространяется на кусочно-гладкие пути (составленные из гладких).

4) Монотонность.

Если $f \leq g$, то

$$\int_{\gamma} f dl \leq \int_{\gamma} g dl. \quad (8)$$

Монотонность влечет за собой известные оценки и теорему о среднем.

5⁰. Физический смысл.

Если $f \geq 0$ — плотность материальной кривой, то $\int_{\gamma} f dl$ — масса.

6⁰. Криволинейный интеграл первого рода на плоскости.

Если плоский путь γ определяется параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

$$\text{то } \int_{\gamma} f dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Если интегрирование ведется по графику Γ непрерывной функции ψ , то

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(x, \psi(x)) \sqrt{1 + \psi'^2(x)} dx.$$

§ 3. Криволинейный интеграл второго рода.

Интегрирование линейных дифференциальных форм

1⁰. Линейные дифференциальные формы

Выражение

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

где P, Q, R — достаточно гладкие функции трех переменных в области G , называется линейной дифференциальной формой. Дифференциальная форма является отображением области G в пространство линейных форм, каждой точке (x, y, z) ставится в соответствие линейная функция, действующая по формуле

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^x \\ \xi^y \\ \xi^z \end{pmatrix} \mapsto \omega(x, y, z)(\xi) = P(x, y, z) \xi^x + Q(x, y, z) \xi^y + R(x, y, z) \xi^z$$

В пространстве \mathbb{R}^2 дифференциальные формы записываются в виде $Pdx + Qdy$, в \mathbb{R}^3 дифференциальная форма имеет вид $Pdx + Qdy + Rdz$.

Примеры.

1) F — непрерывно дифференцируемая функция, дифференциал $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$

— дифференциальная форма. Дифференциал dF является линейной функцией (линейной формой), действующей по формуле $dF(\xi) = \frac{\partial F}{\partial x} \xi^x + \frac{\partial F}{\partial y} \xi^y + \frac{\partial F}{\partial z} \xi^z$. Каждой точке

$(x, y, z) \in G$ поставлена в соответствие линейная форма.

(Если под x понимать координату точки в трехмерном пространстве, то эта функция имеет форму dx своим дифференциалом).

2) Векторному полю $\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$ отвечает дифференциальная форма

$$\vec{f} = f_x dx + f_y dy + f_z dz.$$

2⁰. Интеграл от дифференциальной формы (криволинейный интеграл II рода)

Определенный интеграл $\int_a^b P(x) dx$ можно считать интегралом от дифференциальной формы: промежутки разбиваем на участки $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, вычисляем значения $P \Delta x_k$ дифференциальной формы на приращениях $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, складываем их, тем самым формируем интегральную сумму. В проведенном построении можно рассмотреть и случай $a > b$ и отрицательными Δx_k .

Определение 1. Пусть G — область в \mathbb{R}^3 ,

$\gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]$ — путь класса C^1 , в этой области.

Определим операцию переноса дифференциальной формы

$$\omega = Pdx + Qdy + rdz$$

На промежутке $[a, b]$ отображением γ :

$$\begin{aligned} \omega^*(t)(\xi) &= \omega(\gamma(t))(d\gamma(t, \xi)) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)\xi) = \\ &= (P(\gamma(t))\varphi'(t) + Q(\gamma(t))\psi'(t) + R(\gamma(t))\chi'(t))\xi, \\ \omega^*(t) &= \omega(\gamma(t))(d\gamma(t, \xi)) = \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)\xi) = \\ &= (P(\gamma(t))\varphi'(t) + Q(\gamma(t))\psi'(t) + R(\gamma(t))\chi'(t))dt. \end{aligned}$$

Выражение ω^* получается из ω заменой dx, dy, dz на дифференциалы функций φ, ψ, χ соответственно.

Определение 2. Интегралом от дифференциальной формы ω вдоль γ называется интеграл перенесенной формы ω^* :

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt. \quad (1)$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b (P(\gamma(t))\varphi'(t) + Q(\gamma(t))\psi'(t) + R(\gamma(t))\chi'(t)) dt \quad (2).$$

Такое соглашение оправдывается той точкой зрения, что формы ω и ω^* являются представлениями одного и того же объекта и должны поэтому иметь общее значение интеграла.

В \mathbb{R}^2 интеграл от дифференциальной формы определяется формулой

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt. \quad (3)$$

Для интеграла по графику $\Gamma: y = \psi(x)$ и горизонтальному отрезку $y = y_0$ с направлением движения слева направо имеем соответственно формулы

$$\begin{aligned} \Gamma: y = \psi(x), \quad \int_{\Gamma} Pdx &= \int_a^b P(x, \psi(x)) dx, \quad \int_{\Gamma} Qdy = \int_a^b Q(x, \psi(x)) \psi'(x) dx; \\ \Gamma: y = y_0, \quad \int_{\Gamma} Pdx &= \int_a^b P(x, y_0) dx, \quad \int_{\Gamma} Qdy = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Интеграл от дифференциальной формы можно представить пределом интегральных сумм

$$\int_{\gamma} \omega = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \omega(\xi_k)(\Delta x_k), \text{ здесь } \Delta x_k = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}).$$

Интеграл от линейной дифференциальной формы называется еще криволинейным интегралом II рода.

3⁰. Интегралы по эквивалентным и встречным путям

Предложение 1. Интеграл от дифференциальной формы не зависит от параметризации.

Пусть γ и $\tilde{\gamma}$ — эквивалентные пути. Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega$$

Действительно, $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \lambda$, $\lambda' > 0$ и требуемое равенство получается из формулы замены переменной в определенном интеграле:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \omega(\gamma(\lambda(s))) (\gamma'(\lambda(s)) \lambda'(s)) ds = \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\tilde{\gamma}(s))(\tilde{\gamma}'(s)) ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \omega(\tilde{\gamma}(s))(\tilde{\gamma}'(s)) ds = \int_{\tilde{\gamma}} \omega \end{aligned}$$

Предложение 2. Интегралы по встречным путям взаимно противоположны.

$$\int_{\gamma_-} \omega = - \int_{\gamma} \omega$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \omega(\gamma(t))(\gamma'(t)) dt = \int_a^b \omega(\gamma(a+b-s)) (\gamma'(a+b-s)) ds = \\ &= \int_a^b \omega(\gamma_-(s))(-\gamma'_-(s)) ds = - \int_{\gamma_-} \omega \end{aligned}$$

4⁰. Криволинейный интеграл II рода обладает свойствами линейности и аддитивности (линейности относительно дифференциальной формы, аддитивности относительно пути):

$$\int_{\gamma} (\alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2) = \alpha_1 \int_{\gamma} \omega_1 + \alpha_2 \int_{\gamma} \omega_2,$$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega,$$

если γ составлен из γ_1 и γ_2 .

Если Γ — носитель простого замкнутого пути, то можно определить интеграл $\int_{\Gamma} \omega$, при этом

следует уточнить направление движения по линии Γ .

5⁰. Связь криволинейных интегралов I и II рода.

Пусть γ — гладкий путь, $\bar{a} = \gamma'(t)$ — касательный вектор пути γ , $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ — единичный

касательный вектор. Его координаты — это направляющие косинусы пути:

$$\cos \lambda = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}}, \cos \mu = \frac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}}, \cos \nu = \frac{\chi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}}.$$

Видим, что

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\gamma} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dl .$$

С другой стороны, рассмотрим на пути γ дифференциальную форму

$$\cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz$$

и вычислим ее интеграл вдоль пути γ :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz &= \int_a^b \frac{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}} dt = \\ &= \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt = l(\gamma) \end{aligned}$$

Дифференциальная форма $dl = \cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz$ называется дифференциальной формой длины пути. Теперь на криволинейный интеграл I рода $\int_{\gamma} f dl$ можно смотреть как на

интеграл от дифференциальной формы $f \cdot (\cos \lambda dx + \cos \mu dy + \cos \nu dz)$

6⁰. Физический смысл интеграла II рода. Сила \vec{F} на перемещении $\Delta \vec{r}$ выполняет работу $(\vec{F}, \Delta \vec{r})$. Вдоль пути γ сила \vec{F} выполняет работу

$$\int_{\gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\gamma} F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

7⁰. Перенос линейных дифференциальных форм.

$\Phi : G' \rightarrow G$ — непрерывно дифференцируемое отображение, ω — дифференциальная форма в области G . Определим дифференциальную форму $\omega_1 = \Phi^* \omega$ в области G' :

$$\omega_1(u)(\Delta u) = \omega(\Phi(u))(d\Phi(u)(\Delta u))$$

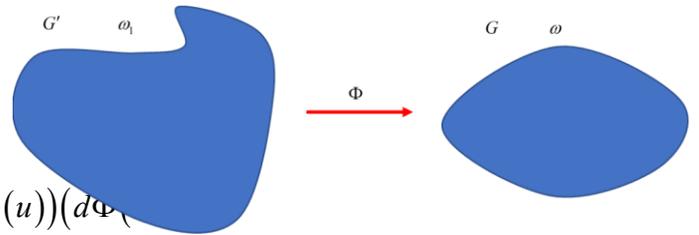
Если γ_1 — путь в области G' , $\gamma = \Phi \circ \gamma_1$ — соответствующий путь в области G . Тогда

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega_1 .$$

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ — дифференциальная форма,

$$\Phi : \begin{cases} x = f(u, v, w), \\ y = g(u, v, w), \\ z = h(u, v, w) \end{cases} \text{ — координатная запись отображения } \Phi .$$

Для $\Delta u(\xi, \eta, \zeta)$ имеем



$$d\Phi(\Delta u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \xi + \frac{\partial f}{\partial v} \eta + \frac{\partial f}{\partial w} \zeta \\ \frac{\partial g}{\partial u} \xi + \frac{\partial g}{\partial v} \eta + \frac{\partial g}{\partial w} \zeta \\ \frac{\partial h}{\partial u} \xi + \frac{\partial h}{\partial v} \eta + \frac{\partial h}{\partial w} \zeta \end{pmatrix}, \text{ так что}$$

$$\begin{aligned} \omega_1(\Delta u) &= P \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial u} \xi + \frac{\partial f}{\partial v} \eta + \frac{\partial f}{\partial w} \zeta \right) + Q \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial u} \xi + \frac{\partial g}{\partial v} \eta + \frac{\partial g}{\partial w} \zeta \right) + R \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial u} \xi + \frac{\partial h}{\partial v} \eta + \frac{\partial h}{\partial w} \zeta \right) = \\ &= \left(P \frac{\partial f}{\partial u} + Q \frac{\partial g}{\partial u} + R \frac{\partial h}{\partial u} \right) \xi + \left(P \frac{\partial f}{\partial v} + Q \frac{\partial g}{\partial v} + R \frac{\partial h}{\partial v} \right) \eta + \left(P \frac{\partial f}{\partial w} + Q \frac{\partial g}{\partial w} + R \frac{\partial h}{\partial w} \right) \zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(P \frac{\partial f}{\partial u} + Q \frac{\partial g}{\partial u} + R \frac{\partial h}{\partial u} \right) du + \left(P \frac{\partial f}{\partial v} + Q \frac{\partial g}{\partial v} + R \frac{\partial h}{\partial v} \right) dv + \left(P \frac{\partial f}{\partial w} + Q \frac{\partial g}{\partial w} + R \frac{\partial h}{\partial w} \right) dw = \\ &= P_1 du + Q_1 dv + R_1 dw, \text{ где} \end{aligned}$$

$$P_1 = P \frac{\partial f}{\partial u} + Q \frac{\partial g}{\partial u} + R \frac{\partial h}{\partial u}, \quad Q_1 = P \frac{\partial f}{\partial v} + Q \frac{\partial g}{\partial v} + R \frac{\partial h}{\partial v}, \quad R_1 = P \frac{\partial f}{\partial w} + Q \frac{\partial g}{\partial w} + R \frac{\partial h}{\partial w}.$$

Видим, что форма ω_1 получается заменой в выражении для ω символов dx , dy , dz дифференциалами функций f , g , h .

Для интегралов получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b (P\varphi' + Q\psi' + R\chi') dt = \\ &= \int_a^b \left(P \left(\frac{\partial f}{\partial u} \varphi_1' + \frac{\partial f}{\partial v} \psi_1' + \frac{\partial f}{\partial w} \chi_1' \right) + Q \left(\frac{\partial g}{\partial u} \varphi_1' + \frac{\partial g}{\partial v} \psi_1' + \frac{\partial g}{\partial w} \chi_1' \right) + R \left(\frac{\partial h}{\partial u} \varphi_1' + \frac{\partial h}{\partial v} \psi_1' + \frac{\partial h}{\partial w} \chi_1' \right) \right) dt = \\ &= \int_a^b (P_1 \varphi_1' + Q_1 \psi_1' + R_1 \chi_1') dt = \int_{\gamma_1} \omega_1 \end{aligned}$$