ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература
А.П.Аксенов Дифференциальные уравнения
А.Ф.Филиппов Введение в теорию дифференциальных уравнений
Л.Э.Эльсгольц Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление

А.Ф.Филиппов Сборник задач по дифференциальным уравнениям

ВВЕДЕНИЕ

Пусть F — непрерывная функция в области $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ Соотношение

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) n-го порядка.
Функция $y = \varphi(x),\ x \in (a,b)$ называется решением дифференциального уравнения (1), если
1) Функция φ n раз непрерывно дифференцируема,
2) $\forall x \in (a,b)$ $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) \in D$,
3) $\forall x \in (a,b)$ $F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0$.
Уравнение

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) \tag{2}$$

называется ОДУ, разрешенным относительно старшей производной.
Пример 1. Частица движется по прямой со скоростью $v(t)$. Найдите закон движения точки. Здесь мы имеем ДУ $x' = v(t)$. Задача решена в интегральном исчислении, решение дается формулой $x = S(t)$, где S — первообразная функции v. Если известно дополнительно, что в момент t_0 точка занимала положение x_0, то $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} v(s)\,ds$

Пример 2. <u>Радиоактивный распад.</u> Скорость распада пропорциональна массе.
Дифференциальное уравнение имеет вид

$$m' = -am.$$

Решения этого уравнения даются формулой

$$m = Ae^{-at}.$$

Если в момент t_0 масса имеет значение m_0 , то $m = m_0 e^{-a(t-t_0)}$.

Глава I. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

§ 1.Основные понятия

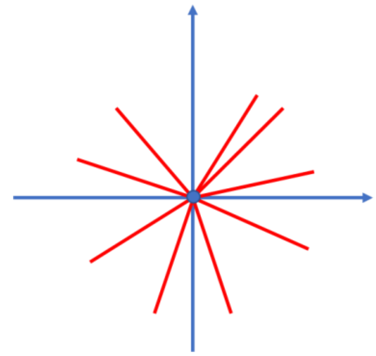
1^0. ОДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной имеет вид

$$y' = f(x,\ y), \tag{1}$$

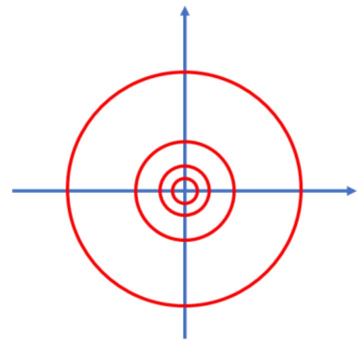
f — непрерывная функция в области G плоскости Oxy .

Функция φ, определенная на интервале Δ ($y=\varphi(x),\ x\in\Delta$) называется решением ДУ (1), если
1) φ, непрерывно дифференцируема на Δ;
2) $\forall x\in\Delta\ \left(x,\ \varphi(x)\right)\in G$;
3) $\forall x\in\Delta\ \varphi'(x)=f\left(x,\varphi(x)\right)$
Процесс отыскания решений ДУ называется интегрированием дифференциального уравнения.
2^0. **Задача Коши.** В примерах мы видели, что рассмотренные ДУ имеют бесконечно много решений. Однако дополнительная информация позволила однозначно выделить нужное решение.
Пусть $\left(x_0,\ y_0\right)\in G$. Решением задачи Коши для ДУ
$$y'=f\left(x,\ y\right) \tag{1}$$
с начальным условием
$$y\,|_{x=x_0}=y_0 \tag{2}$$
называется решение $y=\varphi(x),\ x\in\Delta$ ДУ (1), для которого
$$x_0\in\Delta,\ \varphi(x_0)=y_0.$$
3^0. **Геометрическая интерпретация.** Уравнение (1) определяет в каждой точке области G значение углового коэффициента касательной графика решения, проходящего через эту точку. Говорят, что (1) определяет в области G поле направлений. Задача интегрирования ДУ (1) состоит в построении линий, имеющих во всех своих точках направление, заданное уравнением (1). Такая линия называется интегральной кривой ДУ (1). График решения является интегральной кривой.
4^0. **Дифференциальное уравнение в симметричной форме.** С геометрической точки зрения представляется мало естественным исключение из поля направлений вертикальных и требование для интегральной кривой быть графиком функции $y=\varphi(x)$. ДУ часто записывают в симметричной форме
$$M\left(x,\ y\right)dx+N\left(x,\ y\right)dy=0\ \left(M^2+N^2\neq 0\right). \tag{3}$$
Решениями называются функции двух типов:
$$y=\varphi(x)\qquad M\left(x,\ \varphi(x)\right)+N\left(x,\ \varphi(x)\right)\varphi'(x)=0$$
$$x=\psi(y)\qquad M\left(\psi(y),\ y\right)\psi'(y)+N\left(\psi(y),\ y\right)=0$$
ДУ (3) объединяет два уравнения: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{M}{N},\ \dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{N}{M}$.
Интегральной линией называется кривая, составленная из графиков решений.
Гладкая кривая с параметрическими уравнениями
$$\begin{cases} x=\xi(t), \\ y=\eta(t), \end{cases}$$
является интегральной, если
$$M\left(\xi(t),\ \eta(t)\right)\xi'(t)+N\left(\xi(t),\ \eta(t)\right)\eta'(t)=0.$$
Примеры
1) $y'=\dfrac{y}{x},\ xdy=ydx,\ ydx-xdy=0$.

Уравнение рассматриваем в плоскости с выколотым началом координат.
Решения даются формулами $y = kx$ и $x = ky$.
Интегральные линии — лучи, выходящие из начала координат.



2) $y' = -\dfrac{x}{y}$, $xdx + ydy = 0$



Интегральные линии — окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат. Решения даются формулами
$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in (-R,\ R)$ и $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, $y \in (-R,\ R)$

5^0. Общее решение, общий интеграл

Мы скажем, что формула $y = \varphi(x, C)$ дает общее решение дифференциального уравнения (1), если для любого допустимого C функция $y = \varphi(x, C)$ — решение д.у. (1), причем все решения таким путем могут быть получены. Так, в задаче о радиоактивном распаде формула $M = Ae^{-at}$ — общее решение.
Уравнение $\Phi(x,\ y) = 0$ интегральной линии называется интегралом дифференциального уравнения. Семейство уравнений $\Phi(x,\ y,\ C) = 0$ всевозможных интегральных линий называется общим интегралом д.у. (1).

§ 2 Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

1^0. Уравнение

$$y' = f(x),\ x \in (a,\ b), \tag{1}$$

не содержащее неизвестной функции y. Здесь f — непрерывная функция на интервале $(a,\ b)$.

Если F — некоторая первообразная функции f, то формула $y = F(x) + C$ дает общее решение д.у. (1). Все интегральные линии получаются всевозможными вертикальными сдвигами одной из них (графика функции $y = F(x)$). Вертикальная полоса $(a,\ b) \times \mathbb{R}$ оказывается покрытой сетью непересекающихся интегральных линий. Через каждую точку проходит единственная интегральная линия. Задача Коши

$$y|_{x_0} = y_0$$

имеет единственное решение

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \tag{2}$$

Формула (2) называется общим решением в форме Коши.
2^0. Уравнение

$$y' = g(y),\ y \in (c,\ d), \tag{3}$$

не содержащее независимой переменной x.

Если $\forall y\ g(y)\neq 0$, то решения д.у. (3) — строго монотонные функции, можно поменять роли x и y, считать у независимой переменной , а x неизвестной функцией. Уравнение (3) переписывают в виде $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{g(y)}$ или в симметричной форме $dy=g(y)dx$, $\dfrac{dy}{g(y)}=dx$. Если G — первообразная для $\dfrac{1}{g}$, то интегрированием получаем общее решение в виде

$x=G(y)+C$, решение задачи Коши дается формулой $x=x_0+\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}$.

Предположим теперь, что функция g обращается в нуль, но только в одной точке $y_1\in(c,\ d)$.

В таком случае постоянная функция $y=y_1$ — решение д.у. (3), горизонтальная прямая $y=y_1$ — интегральная линия.

В полосах $c<y<y_1$ и $y_1<y<d$ задача уже решена. Интегральная линия, проходящая через точку $(x_0,\ y_0)$ нижней полосы определяется уравнением $x-x_0=\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}$.

Рассмотрим две возможности.

А) Несобственный интеграл $\displaystyle\int_{y_0}^{y_1}\frac{dt}{g(t)}=+\infty$ расходится. Тогда прямая $y=y_1$ — асимптота для интегральных линий. Допустив, что та же ситуация складывается и в верхней части полосы мы видим , что д.у. (3) имеет интегральные линии трех типов: прямая $y=y_1$, линия $x-x_0=\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{dt}{g(t)}$ и ее всевозможные горизонтальные сдвиги в нижней части полосы и аналогичные линии в верхней части полосы.

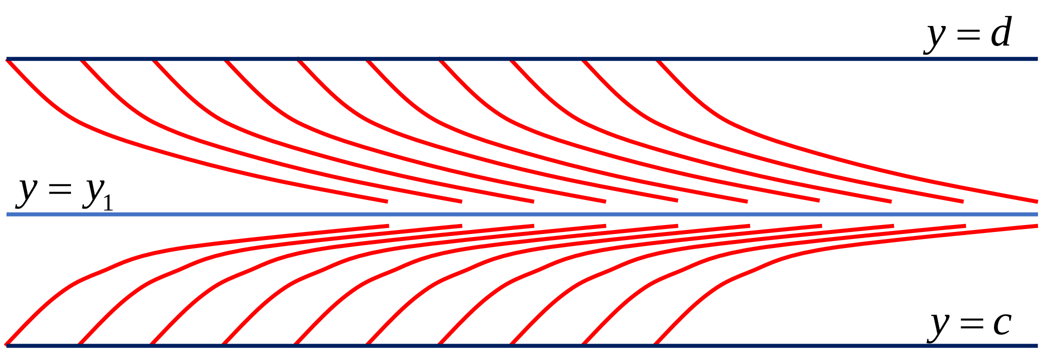


Рисунок выполнен для случая, в котором $g(y)>0$ при $y\in(c,y_1)$, $g(y)<0$ при $y\in(y_1,d)$, $\displaystyle\int_{y_0}^{y_1}\frac{dy}{g(y)}=+\infty\ \left(y_0\in(c,y_1)\right)$, $\displaystyle\int_{y_1}^{y_0}\frac{dy}{g(y)}=-\infty\ \left(y_0\in(y_1,d)\right)$.

Б) Несобственный интеграл $\int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{dt}{g(t)} = A$ сходится. Интегральная линия $x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}$ касается прямой $y = y_1$. в точке с абсциссой $x_1 - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{dt}{g(t)}$ Появляются интегральные линии нового типа, склеенные из линии типа $x - x_0 = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}$ и луча прямой $y = y_1$. Через каждую точку прямой проходит более одной интегральной линии. Такие точки называются точками неединственности. Интегральная линия $y = y_1$ целиком состоит из точек неединственности. Такая интегральная линия называется особой. Соответствующее решение д.у. тоже называется особым.

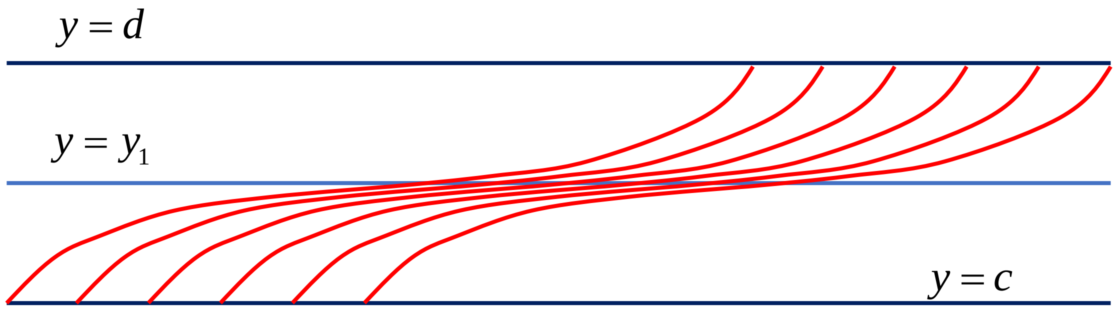


Рисунок выполнен для случая, где $g(y) > 0$ при $y \in (c, y_1)$ и при $y \in (y_1, d)$, интегралы $\int\limits_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{g(y)} \left(y_0 \in (c, y_1)\right)$, $\int\limits_{y_1}^{y_0} \frac{dy}{g(y)} \left(y_0 \in (y_1, d)\right)$ сходятся.

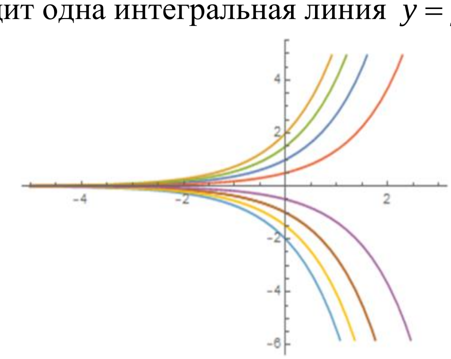
Здесь и через точки полосы $c < y < y_1$ проходит много интегральных кривых, но разветвления происходят все на той же прямой. В пределах некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0) с $y_0 \neq y_1$ интегральная кривая единственна. Такие точки называют точками единственности решения задачи Коши.

Примеры

1) $y' = y,\ y = Ce^x$.

Через каждую точку $(x_0,\ y_0)$ плоскости проходит одна интегральная линия $y = y_0 e^{x - x_0}$.

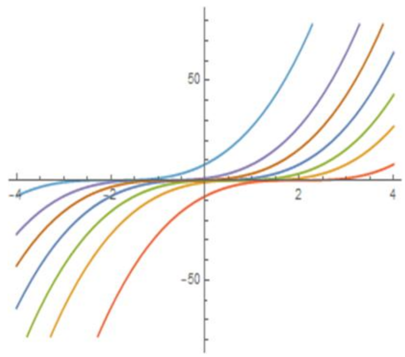
(Здесь $\int\limits_{0}^{y_0} \frac{dt}{t}$ расходится).

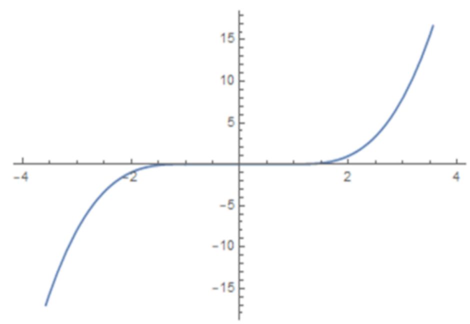


2) $y' = 3y^{2/3},\ y = (x + C)^3$. (Здесь $\int\limits_{0}^{y_0} \frac{dt}{3t^{2/3}} = y_0^{1/3}$ сходится).

Интегральными линиями являются кубические параболы $y=(x+C)^3$, ось абсцисс $y=0$ и линии склеенные из частей кубических парабол и части оси абсцисс, например,

$$y=\begin{cases}(x+1)^3, & x\in(-\infty,-1),\\ 0, & x\in[-1,1],\\ (x-1)^3, & x\in(1,+\infty),\end{cases} \qquad y=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3, & x>0.\end{cases}$$





3^0. Уравнение

$$y'=f(x)g(y) \tag{4}$$

называется дифференциальным уравнением, с разделяющимися переменными. В симметричной форме дифференциальное уравнение, с разделяющимися переменными имеет вид

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0 \tag{5}$$

Уравнение (5) интегрируется путем разделения переменных. Деление на $N_1(y)M_2(x)$ приводит уравнение к виду

$$P(x)dx+Q(y)dy=0, \tag{6}$$

уравнению с разделенными переменными.

Если F — первообразная для P, а G — первообразная для Q, то решения д.у. (6) получаются из соотношения

$$F(x)+G(y)=C. \tag{7}$$

Действительно, функция $y=\varphi(x)$ — решение (6) $\Leftrightarrow$ $\forall x\ P(x)+Q(\varphi(x))\varphi'(x)=0$ $\Leftrightarrow$ $\forall x\ \big(F(x)+G(\varphi(x))\big)'=0$ $\Leftrightarrow$ $F(x)+G(\varphi(x))=const$ $\Leftrightarrow$ $y=\varphi(x)$ удовлетворяет (7).

Можем сказать еще, что (7) — общий интеграл д.у.

При разделении переменных может произойти потеря решений. Если $N_1(y_0)=0$, то постоянная функция $y=y_0$ — решение д.у. (5); равным образом, если $M_2(x_0)=0$, то постоянная функция $x=x_0$ — решение д.у. (5). Указанные решения могут оказаться особыми.

Пример.

$$xydx+(x+1)dy=0,\ \frac{x}{x+1}dx+\frac{1}{y}dy=0,\ \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+\frac{1}{y}dy=0,$$
$$x-\ln|x+1|+\ln|y|=C,\ \frac{y}{x+1}e^{x}=C.$$

Ответ: $y=C(x+1)e^{-x},\ x=-1.$

§ 3 Однородное уравнение

1^0. **Однородное уравнение** имеет вид

$$y'=g\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1}$$

где g — непрерывная функция на интервале $(\alpha,\ \beta)$.

Уравнение оказывается однородным в том смысле, что не меняется при замене $x,\ y$ на $tx,\ ty$. Интегральные кривые образуют семейство подобных кривых с центром подобия в начале координат.

2^0. В уравнении (1) заменим неизвестную функцию, полагая $z=\frac{y}{x}$, $y=xz$, где z — новая неизвестная функция. Тогда $y'=xz'+z$ и уравнение превращается в

$$xz'+z=g(z),\ z'=\frac{g(z)-z}{x} \text{ —} \tag{2}$$

уравнение с разделяющимися переменными.
Проведем его интегрирование:

$$\frac{dz}{g(z)-z}=\frac{dx}{x},\ \Phi(z)=\ln x+\ln C=\ln Cx,\ \Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\ln Cx.$$

Здесь Φ — первообразная для $\frac{1}{g(z)-z}$.

Если $g(z_0)=z_0$, то $y=z_0x$ — решение д.у.

3^0. Уравнение в симметричной форме

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{3}$$

относится к типу однородных, если M, N — однородные функции одного порядка.
(Функция M называется однородной порядка α, если $\forall t>0\ M(tx,ty)=t^{\alpha}M(x,y)$)

Пример

$(x+y)dx-(x-y)dy=0$.

Решение

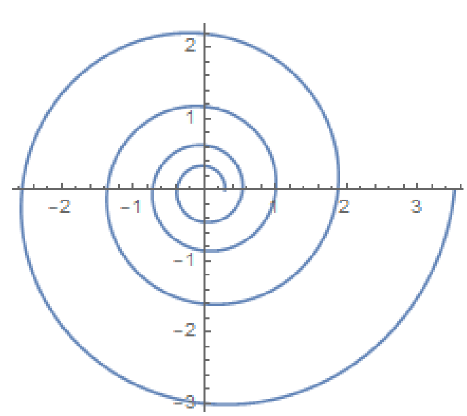
$y=x$

$(1+z$

$\frac{dx}{x}+$

$\frac{1}{2}\ln($

Ответ $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$.



Последнее соотношение удобно представить в полярных координатах:

$$\ln Cr = \varphi,\ r = Ce^{\varphi}$$

Интегральные кривые — логарифмические спирали.

3^0. Уравнение $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ сводится (в большинстве случаев) к однородному сдвигом начала координат.

Положим $x = x_0+u,\ y = y_0+v$. Если

$$\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0+c_1=0, \\ a_2x_0+b_2y_0+c_2=0, \end{cases} \tag{*}$$

мы придем к однородному уравнению $\dfrac{dv}{du} = f\left(\dfrac{a_1u+b_1v}{a_2u+b_2v}\right)$.

Условие (*) может быть обеспечено, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Если же $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то выражения $a_1x+b_1y,\ a_2x+b_2y$ пропорциональны и замена неизвестной функции $z = a_1x+b_1y$ дает д.у., не содержащее неизвестной функции ($z = h'(z)$)

Примеры

1) $(x+y-2)dx-(x-y)dy=0$

$$\begin{cases} x = x_0+u, \\ y = y_0+v, \end{cases} \begin{cases} x_0+y_0-2=0, \\ x_0-y_0=0, \end{cases} \begin{cases} x_0=1, \\ y_0=1, \end{cases} \begin{cases} x=1+u, \\ y=1+v, \end{cases}$$

$$(u+v)du-(u-v)dv=0$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+v^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=C$$

$$\frac{1}{2}\ln\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)-\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-1}=C$$

2) $(x+y+1)dx+2(x+y)dy=0$

$$z = x+y,\ dz = dx+dy.$$

$$\begin{aligned} &(z+1)dx+2z(dz-dx)=0, \\ &(1-z)dx+2zdz=0, \\ &dx=\frac{2z}{z-1}dz, \\ &dx=2\left(1+\frac{1}{z-1}\right)dz, \\ &x=2\left(z+\ln|z-1|\right)+C, \\ &x=2\left(x+y+\ln|x+y-1|\right)+C, \\ &x+2y+2\ln|x+y-1|=C. \end{aligned}$$

§ 4. Линейное уравнение

1^0. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка (ЛДУ) называется дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{1}$$

где $p(x), q(x)$ — непрерывные функции на интервале (a, b)

Уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

называется линейным однородным (ЛОДУ).

2^0. **Построение общего решения**. Начнем с ЛОДУ (2). Это уравнение является уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{y'}{y} = -p(x),\ \left(\ln|y|\right)' = -p(x),\ \ln|y| = -P(x) + \tilde{C},\ P \text{ — первообразная для } p;$$

$$y = Ce^{-P(x)} \text{ —} \tag{3}$$

общее решение ЛОДУ (2).

Для построения общего решения уравнения (1) можно применить метод вариации произвольной постоянной: решение будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-P(x)}. \tag{4}$$

Подставим (4) в (1):

$$C'e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)}\left(-p(x)\right) + Ce^{-P(x)}p(x) = q(x);$$

Получим д.у. для неизвестной функции C :

$$C' = q(x)e^{P(x)}.$$

Интегрирование дает

$$C(x) = R(x) + C,\ R(x) \text{ — первообразная для } q(x)e^{P(x)}.$$

Наконец, формула

$$y = R(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)} \tag{5}$$

дает общее решение ЛДУ (1).

В формуле (5) первое слагаемое — одно из решений (частное решение) ЛДУ (1), второе слагаемое — общее решение соответствующего ЛОДУ (2).

Решение задачи Коши для ЛДУ (1) с начальным условием $y|_{x_0} = y_0$ можно записать в виде

$$y = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt} ds\right)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + \int_{x_0}^{x} q(s)e^{\int_{x}^{s} p(t)dt} ds \tag{6}$$

3^0. **Метод интегрирующего множителя**. Умножим уравнение (1) на интегрирующий множитель $e^{P(x)}$:

$$y'e^{P(x)} + p(x)ye^{P(x)} = q(x)e^{P(x)},$$

$$\left(ye^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)}, \qquad ,$$

$$ye^{P(x)} = R(x) + C;$$

$$y = R(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)} \tag{5}$$

4^0. Пример

$xy' - 3y = 2x^5,\ x \in (0, +\infty)$

I $xy'-3y=0,\ \dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{x},\ \ln|y|=3\ln x+\ln C,\ y=Cx^3;$

$y=C(x)x^3,\ C'x^4+3Cx^3-3Cx^3=2x^5,\ C'=2x,\ C(x)=x^2+C,\ y=x^5+Cx^3.$

II $\dfrac{y'}{x^3}-3\dfrac{y}{x^4}=2x,\ \left(\dfrac{y}{x^3}\right)'=2x,\ \dfrac{y}{x^3}=x^2+C, y=x^5+Cx^3$.

5^0. **Уравнение Бернулли.**

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},\ \alpha\neq 0;1 \qquad (7)$$

Уравнение сводится к линейному.

$$y^{-\alpha}y'+p(x)y^{1-\alpha}=q(x),$$

$$z=y^{1-\alpha},\ z'=(1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

$$\frac{1}{1-\alpha}z'+p(x)z=q(x).$$

Получено линейное уравнение для неизвестной функции z .

6^0. **Задача.** Пусть на отрезке $a\le x\le b$ даны непрерывные функции $p(x),\ q(x),\ r(x)$, причем

$$p(a)=p(b)=0,\ p(x)>0\ \ (a<x<b),$$

$$q(x)>0\ (a\le x\le b),$$

$$\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dx}{p(x)}=\int_{b-\varepsilon}^{b}\frac{dx}{p(x)}=+\infty\ (0<\varepsilon<b-a)/$$

Тогда все решения уравнения

$$p(x)y'+q(x)y=r(x), \qquad (8)$$

существующие на интервале $a<x<b,$ стремятся к $\dfrac{r(b)}{q(b)}$ при $x\to b.$ Среди этих решений одно стремится к $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x\to a$; другие же при $x\to a$ стремятся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Доказательство.

Рассмотрим ЛОДУ

$$p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

Его решения в интервале $(a,\ b)$ даются формулой

$$y=Ce^{-A(x)},$$

где A — некоторая первообразная для $\dfrac{q}{p}$ на интервале $(a,\ b)$. По условию

$$A(x)\underset{x\to a+0}{\to}-\infty,\ A(x)\underset{x\to b-0}{\to}+\infty;$$

$$e^{-A(x)}\underset{x\to a+0}{\to}+\infty,\ e^{-A(x)}\underset{x\to b-0}{\to}0$$

Получается, что все решения имеют нулевой предел в точке b . В точке a все решения, кроме нулевого, имеют бесконечный предел.

Перейдем к рассмотрению неоднородного уравнения.

Умножим (8) на $\dfrac{1}{p(x)}e^{A(x)}$:

$$y'e^{A(x)}+\frac{q(x)}{p(x)}ye^{A(x)}=\frac{r(x)}{p(x)}e^{A(x)};$$

$$\left(ye^{A(x)}\right)'=\frac{r(x)}{p(x)}e^{A(x)}.$$

Установим сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{a+\varepsilon}\dfrac{r(x)}{p(x)}e^{A(x)}dx$.

$\int\limits_{a+\delta}^{a+\varepsilon}\dfrac{q(x)}{p(x)}e^{A(x)}dx = e^{A(a+\varepsilon)}-e^{A(a+\delta)}\underset{\delta\to 0}{\to}e^{A(a+\varepsilon)}$, т.е $\int\limits_a^{a+\varepsilon}\dfrac{q(x)}{p(x)}e^{A(x)}dx$ сходится.

$q(x)>0\ (a\le x\le b)$, поэтому $\exists M\ \ \forall x\ |r(x)|\le Mq(x)$, сходимость $\int\limits_a^{a+\varepsilon}\dfrac{r(x)}{p(x)}e^{A(x)}dx$ следует из теоремы сравнения.

Функция $\psi(x)=\dfrac{\int\limits_a^x\dfrac{r(t)}{p(t)}e^{A(t)}dt}{e^{A(x)}}$ — решение уравнения (8), имеющее предел $\dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x\to a$ (предел вычисляется применением правила Лопиталя). Другие решения получаются добавлением ненулевых решений ЛОДУ и имеют бесконечный предел.

Рассмотренное решение ψ имеет при $x\to b$ предел $\dfrac{r(b)}{q(b)}$. Этот же предел имеют и другие решения, поскольку решения ЛОДУ имеют нулевой предел.

Пример

$x(1-x)y'+y=1$

$\dfrac{x}{1-x}y'+\dfrac{y}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$\left(\dfrac{x}{1-x}y\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$

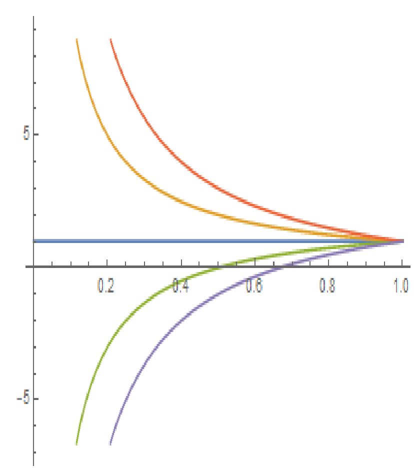
$\dfrac{x}{1-x}y=\dfrac{1}{1-x}+C$

$y=\dfrac{1}{x}+C\dfrac{1-x}{x}$

$y=\dfrac{1}{x}+C\dfrac{1-x}{x}\underset{x\to 1-0}{\to}1$

$C=-1$: $y=1$

$C\ne -1$: $y\underset{x\to +0}{\to}\infty$



§ 5. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

1^0. **Определение**

Дифференциальное уравнение

$$M(x,\ y)dx+N(x,\ y)dy=0,\ (x,\ y)\in G \tag{1}$$

называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, если

$$\exists F\quad dF=Mdx+Ndy\text{, т.е. } \frac{\partial F}{\partial x}=M,\ \frac{\partial F}{\partial y}=N\ .$$

Функция F называется первообразной для дифференциальной формы $Mdx+Ndy$.

2^0. **Общий интеграл.** Для уравнения (1) соотношение

$$F(x,y)=C\ — \tag{2}$$

общий интеграл, решениями д.у. являются функции, удовлетворяющие уравнению (2).

Действительно, $y=\varphi(x)$ — решение (1) $\Leftrightarrow$ $M(x,\ \varphi(x))+N(x,\ \varphi(x))\varphi'(x)=0$ $\Leftrightarrow$

$\left(F(x,\ \varphi(x))\right)'=0 \Leftrightarrow F(x,\ \varphi(x))=const \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ удовлетворяет равенству (2).

3^0. **Признак уравнения в полных дифференциалах.** Пусть функции M, N непрерывно дифференцируемы.

Если (1) —д.у. в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}\ . \tag{3}$$

Действительно,

$$N=\frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x};$$

$$M=\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}.$$

Теорема о смешанных частных производных дает равенство (3).

Определение. Область G называется односвязной, если для любой простой замкнутой кривой $\Gamma\subset G$ внутренность D является частью G .

Односвязность означает, что любой замкнутый путь в G можно стянуть в точку.

В односвязной области условие (3) оказывается достаточным для того, чтобы уравнение (1) было дифференциальным уравнением в полных дифференциалах.

Если G — прямоугольник, первообразную F можно получить по формулам

$$\begin{aligned} F(x,\ y)&=\int_{x_0}^{x}M(\xi,\ y)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\ \eta)d\eta \\ &=\int_{x_0}^{x}M(\xi,\ y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x,\ \eta)d\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Пример

$$(x^2+2xy)dx+(x^2+y)dy=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x^2+2xy,\ F=\frac{x^3}{3}+x^2y+\psi(y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+y,\ x^2+\psi'(y)=x^2+y,\ \psi'(y)=y,\ \psi(y)=\frac{y^2}{2};$$

$$F(x,\ y)=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}.$$

$$\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}=C \text{ — общий интеграл.}$$

Можно пользоваться формулой (4). Эта формула дает

$$F(x,\ y)=\int_0^x\left(\xi^2+2\xi y\right)d\xi+\int_0^y\eta d\eta=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2} \text{ или}$$

$$F(x,\ y)=\int_0^x\xi^2d\xi+\int_0^y\left(x^2+\eta\right)d\eta=\frac{x^3}{3}+x^2y+\frac{y^2}{2}.$$

4^0. **Интегрирующий множитель**

Функция μ называется интегрирующим множителем для д.у.

$$Mdx+Ndy=0,$$

если уравнение

$$\mu Mdx+\mu Ndy=0 \text{ —}$$

уравнение в полных дифференциалах.

С интегрирующим множителем мы уже встречались. Разделяя переменные, мы получали уравнение с разделенными переменными, являющееся уравнением в полных дифференциалах. Для линейного уравнения мы указали интегрирующий множитель.

Если $\mu Mdx+\mu Ndy=0$ — уравнение в полных дифференциалах, то

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\mu\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}N-\frac{\partial\mu}{\partial y}M=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu \text{ —} \qquad (7)$$

уравнение в частных производных для неизвестной функции μ.

Отметим частные случаи, где интегрирующий множитель находится достаточно просто.

I Попытаемся найти интегрирующий множитель в виде функции одной переменной x, $\mu=h(x)$. Здесь

$$\frac{h'}{h}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)$$

$$\mu=h(x)=e^{\Psi(x)},$$

Ψ — первообразная для ψ.

II $\mu=h(y)$

$$\frac{h'}{h}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\psi(y)$$

$$\mu=h(y)=e^{\Psi(y)},$$

Ψ — первообразная для ψ.

III $\mu=h(x+y)$

$$\frac{h'}{h}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=\psi\left(x+y\right)$$

$$\mu=e^{\Psi\left(x+y\right)}.$$

Примеры

1. $xy'-2y=x,\ \left(x+2y\right)dx-xdy=0,\ \mu=\frac{1}{x^3},\ \left(\frac{1}{x^2}+2\frac{y}{x^3}\right)dx-\frac{1}{x^2}dy=0,\ -\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2}=C,\ y=-x+Cx^2.$

2. $\left(x+y+1\right)dx+dy=0,\ \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N-M}=-\frac{1}{x+y},\ \psi\left(u\right)=\frac{1}{u},\ u=x+y,\ \mu=\frac{1}{x+y};$

$\left(1+\frac{1}{x+y}\right)dx+\frac{1}{x+y}dy=0,\ dx+\frac{dx+dy}{x+y}=0,\ x+\ln\left|x+y\right|=C$