Лекция 5   17.09.2024

Глава I. Предел последовательности

§ 1. Понятие последовательности

1⁰. Определение

Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — это функция $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Значение этой функции обозначают через x_n и называют n-м членом последовательности.

Замечание. Бывает удобным нумеровать члены последовательности начиная с некоторого $p \in \mathbb{Z}$, рассматривать последовательности вида $\{x_n\}_{n=p}^{\infty}$.

2⁰. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность. Множество

$$X = \{u \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} \ u = x_n\}$$

называется множеством значений последовательности.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной сверху, ограниченной снизу, ограниченной, если соответствующим свойством обладает множество ее значений.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена сверху } \Leftrightarrow \exists M \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \le M \ ,$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена снизу } \Leftrightarrow \exists m \ \forall n \in \mathbb{N} \ x_n \ge m \, ,$$

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена } \Leftrightarrow \exists M, m \ \forall n \in \mathbb{N} \ m \le x_n \le M \ .$$

Заметим, что

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ ограничена } \Leftrightarrow \exists M \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \le M \ .$$

Примеры. 1) $x_n = \dfrac{1}{n}$ — ограниченная последовательность.

2) $x_n = n^2$ ограничена снизу, но не является ограниченной сверху.

§ 2. Определение предела последовательности

1⁰. Определение 1

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, a — вещественное число.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного ε найдется такой номер N, что для всех натуральных n, больших N, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Если a — предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то пишут

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, \ a = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Последовательность, имеющая предел называется сходящейся, не имеющая предела — расходящейся.

Примеры. 1) $x_n = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ положим } N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \text{ тогда если } n > N, \text{ то } n > \frac{1}{\varepsilon}, \ 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon .$$

Сказанное означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) Последовательность $(-1)^{n-1}$ расходится.

2⁰. Определение

1) Пусть $a \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$.

Множество $V_\varepsilon(a) = \{x \mid |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, \ a+\varepsilon)$ называется ε-окрестностью точки a.

2) Множество V называется окрестностью точки a, если оно содержит некоторую ε-окрестность,

$$\exists \varepsilon > 0 \ V_\varepsilon(a) \subset V .$$

3⁰. Определение 2.

$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, если

$$\forall V \ \exists N \ n > N \Rightarrow x_n \in V .$$

Здесь V — окрестность точки a.

Определения 1, 2 равносильны.

§ 3. Простейшие свойства предела последовательности

1⁰. Стационарная последовательность

Речь идет о последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $x_{n_0+1} = x_{n_0+2} = \dots = a$.

Для этой последовательности $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

Действительно,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; N = n_0 \;\; n > N \;\Rightarrow\; x_n = a, \; |x_n - a| = 0 < \varepsilon .$$

2⁰. Единственность предела.

Допустим, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a, \; x_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ и $a \neq b$. Для определенности предположим, что $a < b$. Положим тогда $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$. По определению предела

$\exists N_1 \;\; n > N_1 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x_n - a < \varepsilon, \; x_n < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$,

$\exists N_2 \;\; n > N_2 \;\Rightarrow\; |x_n - b| < \varepsilon \;\Rightarrow\; x_n - b > -\varepsilon, \; x_n > b - \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$.

Подберем $n_0 : \; n > N_1, \; n_0 > N_2$, получим взаимно противоречивые неравенства

$$x_{n_0} < \frac{a+b}{2} \;\text{ и }\; x_{n_0} > \frac{a+b}{2} .$$

Полученное противоречие опровергает наше допущение. Последовательность имеет не более одного предела.

3⁰. Ограниченность сходящейся последовательности.

Если последовательность сходится, то она ограничена.

Доказательство. Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$. По определению предела

$$\exists n_0 \;\; n > n_0 \;\Rightarrow\; |x_n - a| < 1 \Rightarrow\; x_n < a + 1 .$$

Положим $M = \max\left\{x_1, \, x_2, \dots, \, x_{n_0}, \; a+1\right\}$. Теперь $\forall n \in \mathbb{N} \;\; x_n \le M$ (если $n \le n_0$, то неравенство прямо следует из определения числа M; если $n > n_0$, то $x_n < a + 1 \le M$). Последовательность ограничена сверху.

Ограниченность снизу устанавливается аналогично.

4^0. Подпоследовательность.

Определение.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая ($n_1 < n_2 < \cdots$) последовательность натуральных чисел.

Построим новую последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, полагая $y_k = x_{n_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Эта последовательность называется подпоследовательностью исходной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Примеры

1) $y_k = x_{p+k}$ — подпоследовательность, полученная отбрасыванием нескольких первых членов исходной последовательности.

2) $y_k = x_{2k}$ — подпоследовательность, состоящая из членов с четными номерами.

3) $y_k = x_{2k-1}$ — подпоследовательность, состоящая из членов с нечетными номерами.

Теорема 1.

Подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же пределу.

Доказательство.

По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \ n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon .$$

Пусть $k > N$, тогда $n_k \geq k > N$, так что $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, т.е. $|y_k - a| < \varepsilon$. Сказанное означает, что $y_k \underset{k\to\infty}{\to} a$.

Пример.

$x_n = (-1)^{n-1}$, $y_k = x_{2k} = 1$, $z_k = x_{2k-1} = -1$. Последовательность $(-1)^{k-1}$ оказывается расходящейся, поскольку имеет подпоследовательности с разными пределами.

Упражнения.

1) Если $x_{2k} \underset{k\to\infty}{\to} a$, $x_{2k-1} \underset{k\to\infty}{\to} a$, то $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

2) $x_{p+k} \underset{k\to\infty}{\to} a \Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

§ 4 Сходимость и арифметические операции

Теорема1. О пределе суммы

Предел суммы равен сумме пределов.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $z_n = x_n + y_n$.

Тогда если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, то и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n \tag{1}$$

Теорема 2. О пределе произведения

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $z_n = x_n \cdot y_n$.

Тогда если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, то и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n \tag{2}$$

Доказательство.

Положим $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Проведем предварительную оценку.

$$z_n - ab = x_n y_n - a y_n + a y_n - ab = (x_n - a) y_n + a(y_n - b).$$

Поэтому

$$|z_n - ab| \le |x_n - a||y_n| + |a||y_n - b|.$$

Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, поэтому она ограничена, найдется такое число $M > 0$ что $|y_n| \le M$ при всех n. Можно считать, что $|a| \le M$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то

$$\exists N_1 \quad n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Точно так же

$$\exists N_2 \quad n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Для $n > N$ получаем оценку

$$\left|z_n - ab\right| \le M\,\frac{\varepsilon}{2M} + M\,\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon\,.$$

Соотношение $z_n \underset{n\to\infty}{\to} ab$ доказано.

Следствие. Предел линейной комбинации

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lambda x_n + \mu y_n\right) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n + \mu \lim_{n\to\infty} y_n \qquad (3)$$

Теорема 3. О пределе частного

Пусть $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $\forall n\ y_n \ne 0$, $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Тогда если $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, то и $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad (4)$$

§ 5 Сходимость и неравенства

Теорема 1. О стабилизации неравенств

Пусть $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a,\ \ y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$

$$a < b\,.$$

Тогда найдется такой номер n_0, что

$$x_n < y_n \text{ для } n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \ldots$$

Доказательство.

Положим $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2} > 0$.

Поскольку $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$, то найдется такой номер n_1, что $\left|x_n - a\right| < \varepsilon$ для $n = n_1 + 1,\ n_1 + 2, \ldots$.

Для таких n имеем $x_n - a < \varepsilon,\ x_n < a + \varepsilon = \dfrac{a+b}{2}$.

Поскольку $y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$, то найдется такой номер n_2, что $\left|y_n - b\right| < \varepsilon$ для $n = n_2 + 1,\ n_2 + 2, \ldots$.

Для таких n имеем $y_n - b > -\varepsilon,\ y_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$.

Положим $n_0 = \max\{n_1,\ n_2\}$. При $n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \dots$ справедливы оба неравенства

$x_n < \frac{a+b}{2},\ y_n > \frac{a+b}{2}$, из которых и следует неравенство

$$x_n < y_n .$$

Следствия 1) Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a < b$, то $x_n < b$ для $n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \dots$

2) Если $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a > 0$, то $x_n > 0$ для $n = n_0 + 1,\ n_0 + 2, \dots$

Теорема 2. О предельном переходе в неравенстве

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a,\ \ y_n \underset{n\to\infty}{\to} b$.

Если

$$\forall n\ \ x_n \le y_n ,$$

то

$$a \le b$$

Доказательство.

Допустим, $a > b$. Тогда по теореме 1 $x_n > y_n$, начиная с некоторого номера, вопреки условию.

Замечания.

1) Достаточно потребовать выполнения неравенства $x_n \le y_n$, начиная с некоторого номера.

2) Теорема гарантирует только нестрогое неравенство. Может случиться, что $x_n < y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Например, $\frac{1}{n} > 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Теорема 3. О милиционерах.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовые последовательности, связанные неравенством

$$x_n \le z_n \le y_n ,$$

и

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} a,\ \ y_n \underset{n\to\infty}{\to} a .$$

Тогда

$$z_n \underset{n\to\infty}{\to} a \; .$$

Доказательство.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \;\; n > N \Rightarrow \begin{array}{l} |x_n - a| < a, \; x_n > a - \varepsilon \\ |y_n - a| < a, \; y_n < a + \varepsilon \end{array} \Rightarrow a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \; .$$