Лекция 5. Продолжение 18.02.2025

Глава III. Геометрические приложения определенного интеграла

§ 1. Площадь плоской фигуры

1^0. Понятие площади

Ограниченное множество на плоскости будем называть плоской фигурой.

а) P — прямоугольник,

$$P=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}.$$

Тогда число $\mu P=(b-a)(d-c)$ называется площадью этого прямоугольника.

Площадь аддитивна. Если прямоугольник P составлен из прямоугольников $P_1,\dots,P_n$, то $\mu P=\sum_{k=1}^{n}\mu P_k$.

б) P — фигура, составленная из прямоугольников. Такую фигуру будем называть клеточной. Составляющие прямоугольники должны пересекаться лишь по части контуров. Площадь μP клеточной фигуры — сумма площадей составляющих прямоугольников. Можно показать, что эта сумма не зависит от способа разбиения клеточной фигуры на прямоугольники. (Пусть клеточная фигура P составлена из прямоугольников $P_1,\dots,P_n$ и из прямоугольников $Q_1,\dots,Q_m$. Положим $R_{ij}=P_i\cap Q_j$, тогда каждый из прямоугольников $P_i,\ i=1,\dots,n,$ оказывается составленным из прямоугольников $R_{i1},\dots,R_{im}$, поэтому $\mu P_i=\sum_{j=1}^{m}\mu R_{ij}$, а $\sum_{i=1}^{n}\mu P_i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu R_{ij}$. Точно так же получается равенство $\sum_{j=1}^{m}\mu Q_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\mu R_{ij}$).

в) Пусть E — фигура на плоскости.

Число S назовем площадью фигуры E и напишем $S=\mu E=|E|$, если для любого $\varepsilon>0$ найдутся клеточные фигуры $P,\ Q$, для которых

$$P\subset E\subset Q,\ \ S-\varepsilon<\mu P\le\mu Q<S+\varepsilon.$$

Фигура, имеющая площадь, называется квадрируемой.

Предложение 1. Если $\forall\varepsilon>0$ найдутся квадрируемые фигуры $E_1,\ E_2$, для которых $E_1\subset E\subset E_2,\ \ S-\varepsilon<\mu E_1\le\mu E_2<S+\varepsilon$, то E квадрируема и $S=\mu E$.

Действительно, найдутся такие клеточные фигуры $P,\ Q$, что $P\subset E_1\subset E\subset E_2\subset Q$ и $S-2\varepsilon<\mu E_1-\varepsilon<\mu P\le\mu Q<\mu E_2+\varepsilon<S+2\varepsilon$. Число S — площадь фигуры E.

Предложение 2. Для квадрируемости фигуры E необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлись клеточные фигуры $P,\ Q$, для которых $P\subset E\subset Q,\ \mu(Q\setminus P)<\varepsilon$.

Доказательство.

Необходимость. Пусть $S=\mu E$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists P,Q: P\subset E\subset Q,\ S-\varepsilon<\mu P\le\mu Q<S+\varepsilon$. Для этих клеточных фигур $P,\ Q$ выполняется неравенство $\mu(Q\setminus P)<2\varepsilon$

Достаточность. Зафиксируем некоторую клеточную фигуру $Q_0 \supset E$. Тогда для всякой фигуры $P \subset E$ справедливо неравенство $\mu P \le \mu Q_0$, площади μP образуют ограниченное множество, положим $S = \sup\limits_{P \subset E} \mu P < +\infty$. Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. По условию $\exists P, Q : P \subset E \subset Q,\ \mu\left(Q \setminus P\right) < \varepsilon$. Для этих клеточных фигур можем написать $\mu P \le S$, $\mu Q \ge S$ $S - \varepsilon \le \mu Q - \varepsilon < \mu P \le \mu Q < \mu P + \varepsilon \le S + \varepsilon$. Число S — площадь фигуры E.

Определение. Фигура E имеет нулевую площадь, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists Q \supset E\ \ \mu Q < \varepsilon$$

Предложение 3. Фигура E квадрируема в том и только в том случае, если ее граница ∂E имеет нулевую площадь.

Предложение 4. 1) Подграфик непрерывной положительной функции — квадрируемая фигура.

2) Фигура, ограниченная одной или несколькими кусочно-гладкими кривыми, — квадрируемая фигура.

2⁰. Свойства площади

1) $\mu E \ge 0,\ \ \mu \varnothing = 0$

2) Если фигуры $E_1,\ E_2$ квадрируемы, то квадрируемыми будут и $E_1 \cup E_2,\ E_1 \cap E_2,\ E_1 \setminus E_2$.

3) **Аддитивность.** Если фигуры $E_1,\ E_2$ квадрируемы и $\mu\left(E_1 \cap E_2\right) = 0$, то

$$\mu\left(E_1 \cup E_2\right) = \mu E_1 + \mu E_2 .$$

4) **Монотонность.** Если фигуры $E_1,\ E_2$ квадрируемы и $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 \le \mu E_2$.

5) **Инвариантность.** Если фигура E_1 квадрируема, а E_2 получена из E_1 сдвигом и поворотом, то E_2 квадрируема и $\mu E_1 = \mu E_2$.

3⁰. Площадь криволинейной трапеции

Теорема 1. Пусть f — положительная непрерывная функция на отрезке $\left[a,\, b\right]$,

$$E = \left\{\left(x, y\right) : x \in \left[a,\, b\right],\ 0 \le y \le f\left(x\right)\right\}.$$

E — криволинейная трапеция, подграфик функции f.

Тогда фигура E квадрируема, ее площадь S можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b f\left(x\right) dx . \tag{1}$$

Доказательство.

Положим $I = \int_a^b f\left(x\right) dx$. Пусть $\varepsilon > 0$. Существует разбиение $\tau : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ отрезка $\left[a,\, b\right]$, для которого $I - \varepsilon < s_\tau \le S_\tau < I + \varepsilon$. Разбиению τ поставим в соответствие клеточные фигуры $P,\ Q$. Клеточная фигура P, составлена из прямоугольников $\left[x_{k-1},\ x_k\right] \times \left[0,\ m_k\right],\ k = 1, \ldots, n$, а фигура Q — из прямоугольников $\left[x_{k-1},\ x_k\right] \times \left[0,\ M_k\right],\ k = 1, \ldots, n$. Фигуры $P,\ Q$ имеют площади $\mu P = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = s_\tau > I - \varepsilon$ и $\mu Q = S_\tau < I + \varepsilon$,Таким образом, $P \subset E \subset Q$, $I - \varepsilon < \mu P \le \mu Q < I + \varepsilon$, число I является площадью криволинейной трапеции E.

Лекция 6. 20.02.2025

Следствие. Пусть φ, ψ — непрерывные функции на отрезке $[a,\, b]$, $\varphi \le \psi$.

Тогда криволинейная трапеция $E = \{(x, y):\, x \in [a,\, b],\, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$ имеет площадь

$$S = \int_a^b \left(\psi(x) - \varphi(x)\right) dx \tag{2}$$

Пример. Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Применяя теорему 1, можем написать

$$S = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx = 4ab\int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt = \pi ab\,.$$

5^0. Площадь фигуры, ограниченной параметрически заданной кривой. Пусть параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t),\, t \in [\alpha,\, \beta] \end{cases} \tag{*}$$

определяют на плоскости простую замкнутую гладкую кривую Γ, движение по которой происходит в направлении против часовой стрелки. Линия Γ ограничивает некоторую фигуру E. Допустим, что существует $t_0 \in (\alpha,\, \beta)$, такое что функция φ строго возрастает на $[\alpha,\, t_0]$ и строго убывает на $[t_0,\, \beta]$. На первом участке система (*) параметрически определяет функцию f_1, на втором — функцию f_2. Фигура E — криволинейная трапеция, ограниченная графиками функций $f_1,\ f_2$, ее площадь

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx\,,$$

где $a = \varphi(\alpha) = \varphi(\beta),\, b = \varphi(t_0)$.

Пользуясь уравнениями (*), проведем в интеграле замену переменой по формуле $x = \varphi(t),\, t \in [\alpha,\, t_0]$. Поскольку $f_1 = \psi \circ \varphi^{-1}$, то $f_1 \circ \varphi = \psi$ и $\int_a^b f_1(x)\, dx = \int_\alpha^{t_0} \psi(t)\varphi'(t)\, dt$.

Аналогично получается равенство $\int_a^b f_2(x)\, dx = -\int_{t_0}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\, dt$ (знак минус поставлен с учетом убывания функции φ). Для площади получается формула $S = -\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\, dt$. Если поменять роли переменных, получится формула $S = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\psi'(t)\, dt$. Можно написать еще симметричную формулу

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t)\right) dt\,. \tag{4}$$

Например, зная параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$,

вычислим его площадь $S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\right) dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab$.

§ 2. Аддитивная функция промежутка

1⁰. Пусть каждому отрезку $[\alpha,\ \beta] \subset [a,\ b]$ поставлено в соответствие число $F\left([\alpha,\ \beta]\right)$. Тогда правило F называется функцией промежутка. Если функция промежутка удовлетворяет условию

$$F\left([\alpha,\ \beta]\right) = F\left([\alpha,\ \gamma]\right) + F\left([\gamma,\ \beta]\right)$$

(при любых $\alpha \le \gamma \le \beta$), то она называется аддитивной функцией промежутка.

Если f — интегрируемая на отрезке $[a,\ b]$ функция, то формула $F\left([\alpha,\ \beta]\right) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ определяет аддитивную функцию промежутка. f называется плотностью функции промежутка F.

Предложение. F аддитивная функция промежутка, f — интегрируема на отрезке $[a,\ b]$. Пусть для любого отрезка $[\alpha,\ \beta] \subset [a,\ b]$ выполняется неравенство

$$m(\beta - \alpha) \le F\left([\alpha,\ \beta]\right) \le M(\beta - \alpha), \tag{*}$$

где $m = \inf f\left([\alpha,\ \beta]\right), M = \sup f\left([\alpha,\ \beta]\right)$.

Тогда F — функция промежутка с плотностью $f : F\left([\alpha,\ \beta]\right) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Действительно, пользуясь аддитивностью функции F, из условия (*) мы получаем неравенство

$$s_\tau \le F\left([\alpha,\ \beta]\right) \le S_\tau, \tag{**}$$

справедливое для любого разбиения τ отрезка $[\alpha,\ \beta]$. Но между всевозможными суммами Дарбу лежит только одно число — $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Таким образом $F\left([\alpha,\ \beta]\right) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

В приложениях функция f обычно является непрерывной, тогда условие (*) сводится к приближенному равенству $\Delta F \approx f(x)\Delta x$ или даже $dF = f(x)\,dx$, dF называют элементом аддитивной функции.

Суммирование элементов дает соответствующие равенства для интегральных сумм, предельный переход приводит к интегралу.

Можно предложить и несколько иную точку зрения.

Свяжем с функцией промежутка функцию точки $F(x) = F\left([a,\ x]\right)$. Функция промежутка выражается через функцию точки равенством

$$F\left([\alpha,\ \beta]\right) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Равенство $dF = f(x)\,dx$ дает дифференциал функции F, f — производная. По формуле Ньютона-Лейбница

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ F([a,b])=\int_a^b f(x)\,dx$$

2⁰. Площадь криволинейного сектора

Предложение. Пусть E — фигура, состоящая из точек, полярные координаты $r,\ \varphi$ которых удовлетворяют неравенствам $\alpha\le\varphi\le\beta,\ 0\le r\le h(\varphi)$ (здесь $\beta-\alpha\le 2\pi$, h — непрерывная положительная функция на отрезке $[\alpha,\ \beta]$). Тогда "криволинейный сектор" E имеет площадь

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta h^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3)$$

Доказательство. Будем считать известной формулу для вычисления площади кругового сектора $\Delta S=\frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$. Для «элемента» площади получаем формулу $dS=\frac{1}{2}h^2(\varphi)\,d\varphi$, а для площади криволинейного сектора — формулу (3).

Пример. Найдем площадь петли декартова листа $x^3+y^3=3axy$. Полагая в уравнении $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$, получим полярное уравнение в виде

$$r=\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}.$$

Площадь представится интегралом

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2}d\varphi.$$

Замена переменной $z=\operatorname{tg}\varphi$ приводит интеграл к виду

$$S=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{z^2dz}{\left(z^3+1\right)^2}=-\frac{3a^2}{2}\frac{1}{z^3+1}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{3a^2}{2}.$$

§ 3. Объем тела

1⁰. Понятие объема введем аналогично площади. Для параллелепипеда объем — произведение его измерений. Тело, составленное из параллелепипедов, назовем клеточным. Его объем — сумма объемов составляющих параллелепипедов.

Пусть D — некоторое тело. Число V назовем объемом тела D и напишем $V=\mu D$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A,B \text{ — клеточные тела } A\subset D\subset B,\ V-\varepsilon<\mu A\le\mu B<V+\varepsilon.$$

Тело, имеющее объем, называется кубируемым.

2⁰. Объем цилиндрического тела

$$D=E\times\Delta=\left\{(x,y,z):(x,y)\in E,\ z\in\Delta\right\},$$

где E — плоская квадрируемая фигура, а Δ — отрезок, вычисляется по формуле

$$V=S\cdot H, \qquad (1)$$

где S — площадь основания E, а H — высота цилиндра (длина отрезка Δ).

3⁰. **Объем тела с заданными площадями поперечных сечений.**

Теорема 1. D — кубируемое тело, заключенное между плоскостями $z=a$ и $z=b$, E_z — сечение тела горизонтальной плоскостью. Предположим, что при всех $z\in[a,\ b]$ фигура E_z квадрируема, $\sigma:\sigma(z)=\mu E_z$ — непрерывная функция.

Тогда объем тела D может быть вычислен по формуле

$$V = \int_a^b \sigma(z)\,dz . \qquad (2)$$

Доказательство. С учетом формулы (1) для элемента объема пишем формулу $dV = \sigma(z)\,dz$, а для объема — формулу (2)

Примеры. 1) Объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Здесь $\sigma(z)$ — площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$, имеющим полуоси $a(z)=a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b(z)=b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $\sigma(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$. Объем эллипсоида оказывается равным

$$V = 2\pi ab\int_0^c \left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz = 2\pi abc\int_0^1 \left(1-u^2\right)du = 2\pi abc\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc .$$

2) Объем пирамиды и конуса высоты H с основанием площади S. Сечение тела плоскостью, параллельной основанию и удаленной от вершины на расстояние z — фигура, подобная основанию с коэффициентом z/H, это сечение имеет площадь $\sigma(z)=S\left(\frac{z}{H}\right)^2$. Объем тела оказывается равным

$$V = S\int_0^H \left(\frac{z}{H}\right)^2 dz = SH\int_0^1 u^2du = \frac{1}{3}SH .$$

4^0. **Объем тела вращения.**

Теорема 2. f — непрерывная положительная функция на отрезке $[a,\,b]$, E — подграфик, D — тело, полученное вращением фигуры E вокруг оси абсцисс:

$$D=\left\{(x,\ y,\ z): x\in[a,\,b],\ y^2+z^2\le f^2(x)\right\} .$$

Тогда тело D имеет объем

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx . \qquad (3)$$

Доказательство. Выполнены условия теоремы 1, сечением тела D является круг радиуса $f(x)$, так что площадь сечения равна $\pi f^2(x)$ и формула (2) превращается в (3).

Предложение. Пусть в дополнение к условиям Т.2 имеет место неравенство $a\ge 0$, а D — тело, полученное вращением фигуры E вокруг оси ординат.
Тогда тело D имеет объем

$$V = 2\pi\int_a^b x\,f(x)\,dx \qquad (4)$$

Здесь элемент тела, отвечающий промежутку $[x,\,x+\Delta x]$, — теоретико-множественная разность цилиндров высоты $f(x)$ и радиусов x и $x+\Delta x$. Элемент объема оказывается равным $dV = 2\pi x\,f(x)\,dx$. Таким образом, для объема получается формула (4).

Пример. Вычислим объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной координатными осями и гиперболой $(x+1)(y+1)=2$. Здесь можно пользоваться как формулой (3), так и формулой (4).
Формула (3) дает

$$V=\pi\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-1\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+1}+1\right)dx=\pi(2-4\ln 2+1)=\pi(3-4\ln 2)\,.$$

По формуле (4) получим

$$V=2\pi\int_0^1 x\left(\frac{2}{x+1}-1\right)dx=2\pi\int_0^1\left(2-\frac{2}{x+1}-x\right)dx=2\pi(2-2\ln 2-\frac{1}{2})=\pi(3-4\ln 2)\,.$$

Предложение. Тело вращения криволинейного сектора.
Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг полярной оси криволинейного сектора, ограниченного линией, заданной полярным уравнением $r=h(\varphi)$, $0\le\alpha\le\varphi\le\beta\le\pi$.
Объем тела вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta h^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим тело вращения кругового сектора радиуса R с центральным углом φ. Его объем равен

$$V=\frac{1}{3}\pi R^3\cos\varphi\sin^2\varphi+\pi\int_{R\cos\varphi}^{R}(R^2-x^2)dx=\frac{1}{3}\pi R^3\cos\varphi\sin^2\varphi+\pi R^3(1-\cos\varphi)-\frac{1}{3}R^3(1-\cos^3\varphi)=$$

$$\frac{1}{3}\pi R^3(\cos\varphi\sin^2\varphi+3-3\cos\varphi-1+\cos^3\varphi)=\frac{2}{3}\pi R^3(1-\cos\varphi).$$

Элемент объема оказывается равным $dV=\frac{2}{3}\pi R^3\sin\varphi\, d\varphi$. Для криволинейного сектора получается соответственно $dV=\frac{2}{3}\pi h(\varphi)^3\sin\varphi\, d\varphi$, что и дает формулу (4).

§ 4. Длина пути

Понятие длины пути

Определение

Пусть $\gamma:[a,\,b]\to\mathbb{R}^3\left(\mathbb{R}^2\right)$ — путь в пространстве (на плоскости).
$\tau: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ — разбиение отрезка $[a,\,b]$; $\Delta_k=[t_{k-1},\,t_k]$ — отрезки разбиения, $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ — длины этих отрезков.
Положим $M_k=\gamma(t_k)$ (для $k=0,1,\ldots,n$), рассмотрим ломаную Γ_τ с вершинами в точках M_k.
Эта ломаная имеет длину $L_\tau=\sum_{k=1}^{n}|M_{k-1}M_k|$.
Если длины ломаных, соответствующих всевозможным разбиениям, образуют ограниченное множество, то путь γ называется спрямляемым. Верхняя грань L этого множества называется длиной пути,

$$L = \sup_{\tau} L_{\tau}.$$

Неспрямляемому пути можно приписать длину $+\infty$.

Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ — гладкий путь, $\vec{r}$ — соответствующая вектор-функция,

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \ t \in [a, b] \end{cases}$$

параметрические уравнения.

В первом семестре мы установили спрямляемость гладкого пути.

Теорема 1.

Длина гладкого пути γ вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \left| \vec{r}'(t) \right| dt \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $l : l(t)$ — длина пути $\gamma\big|_{[a,\, t]}$. Мы установили, что l — непрерывно дифференцируемая функция, $l'(t) = \left| \vec{r}'(t) \right|$, $t \in [a, b]$. По формуле Ньютона-Лейбница $l(t) = \int_a^t \left| \vec{r}'(\tau) \right| d\tau$, $t \in [a, b]$, в частности, $L = l(b) = \int_a^b \left| \vec{r}'(t) \right| dt$.

Дополнение. Формула (1) справедлива и для кусочно-гладкого пути.

Пример.

Для параметризации окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases}$$

имеем $\varphi'(t) = -R\sin t$, $\psi'(t) = R\cos t$, $\left| \vec{r}'(t) \right| = R$. По теореме 2

$$l'(t) = R, \ l(t) = R \cdot t.$$

Длина окружности оказывается равной

$$l(2\pi) = 2\pi R.$$

В координатах формула (1) имеет вид

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)}\, dt. \qquad (2)$$

Длина плоского пути

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \ t \in [a, b] \end{cases}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \qquad (3)$$

Если $\Gamma : y = f(x)$, $x \in [a, b]$ — график непрерывно дифференцируемой функции, то его длина равна

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx. \tag{4}$$

Если кривая Γ задана полярным уравнением $r = h(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, то

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{h^2(\varphi) + h'^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{5}$$

(Пользуясь полярным уравнением, запишем параметрические уравнения $x = h(\varphi)\cos\varphi,\ y = h(\varphi)\sin\varphi$. Далее $\frac{dx}{d\varphi} = h'(\varphi)\cos\varphi - h(\varphi)\sin\varphi,\ \frac{dy}{d\varphi} = h'(\varphi)\sin\varphi + h(\varphi)\cos\varphi$, $\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = h^2(\varphi) + h'^2(\varphi)$).

Пример. Вычислим длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Ограничимся частью кривой, расположенной в первой четверти. Запишем формулу, дающую явное задание кривой:

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2}.$$

Имеем: $y' = -\left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{1/2} x^{-1/3}$, $1 + y'^2 = 1 + \frac{a^{2/3} - x^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}$. Длина кривой оказывается равной $L = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}a^{1/3}x^{2/3}\Big|_0^a = \frac{3}{2}a$. Вычисление можно было провести и в параметрическом виде, записав уравнения астроиды в форме

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, \pi/2]. \end{cases}$$

Теперь

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(-3a\cos^2 t\sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2}\ dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\ dt = \frac{3}{2}a\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}a.$$

§ 5. Площадь поверхности вращения

Пусть $f \geq 0$ — непрерывно дифференцируемая положительная функция на отрезке $[a, b]$, Γ — ее график, S — поверхность вращения Γ вокруг оси абсцисс.

Пусть τ — разбиение отрезка $[a, b]$, Γ_τ — соответствующая ломаная, S_τ — ее поверхность вращения. Обозначим через μS_τ площадь этой поверхности (S_τ состоит из боковых поверхностей усеченных конусов).

$\mu S = \lim\limits_{\lambda_\tau \to 0} \mu S_\tau$ называется площадью поверхности вращения S.

Теорема 1.

Площадь поверхности вращения S вычисляется по формуле

$$\mu S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx. \tag{1}$$

Для элемента поверхности имеем выражение $dS = 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\ dx$, что и дает формулу (1).

Пример. Вычислим площадь сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Сфера — поверхность вращения полуокружности $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ вокруг оси абсцисс. По формуле (1) получаем площадь сферы

$$\mu S = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 2\pi a \int_{-a}^{a} dx = 4\pi a^2 .$$